

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

32. Band, Heft 5

24. Januar 1950

S. 193—240

## Geschichte.

Thureau-Dangin, F.: *Un problème algébrique babylonien*. Réimpression d'un article de Halil Edhem Hatira Kitabi. Recueil offert à la Mémoire de Halil Edhem et publié par la Société d'Histoire Turque, 44—47, Ankara (1947).

Lejeune, Albert: Les „postulats“ de la catoptrique dite d'Euclide. Arch. internat. Hist. Sci., Paris 28, 598—613 (1948).

Der unbekannte Verfasser der pseudo-Euklidischen Katoptrik hat an den Anfang seiner aus verschiedenen Quellen zusammengetragenen recht mittelmäßigen Abhandlung 6 „Postulate“ gesetzt, die vom Verf. inhaltlich und philosophisch untersucht werden. Es zeigt sich, daß zwei dieser Sätze für die geometrische Theorie des Spiegels nutzlos sind und auch gar nicht verwendet werden. Alle 6 „Postulate“ sind nichts anderes als die formulierten Ergebnisse teils wirklich durchführbarer (und lange durchgeführter), teils nur angenommener und der Wirklichkeit widersprechender „experimenteller“ Beobachtungen (*φανόμενα*). Die Postulate besagen im Grunde nichts anderes, als es Ptolemaios in den drei seine Optik einleitenden Sätzen einfacher, exakt und erschöpfend ausgesprochen hat. Verf. läßt die Frage offen, ob wirklich Theon von Alexandrien, den man als Autor angesehen hat, ein solches Werk, das die griechische Katoptrik in einem dekadenten Stadium zeigt, verfaßt haben kann.

K. Vogel (München).

• Hofmann, Jos. E.: *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris (1672—1676)*. München: Leibniz Verlag (bisher R. Oldenbourg Verlag) 1949. 253 S. u. 27 Abb. im Text. DM 26.—

In der Besprechung einer früheren kleinen Schrift des Verf. über denselben Gegenstand (Leibniz' Mathematische Studien in Paris; dies. Zbl. 31, 97] wurde schon auf das nunmehr vorliegende Werk hingewiesen. Während in jener ersten Arbeit ein kurzer Überblick über Leibnizens mathematische Studien in Paris, vorwiegend auf Grund von wissenschaftlichen Briefen aus jener Zeit, gegeben wird, enthält das neue Werk eine ausführliche Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik in jenen bedeutungsvollen 4 Jahren. Es stützt sich auf das gesamte, heute bekannte und z. T. erst vom Verf. durchgearbeitete und entdeckte Material, das gedruckte und das ungedruckte. Über 700 Stücke (Briefe, Veröffentlichungen in den Philos. Trans., dem Journal des Sçavans und den Acta eruditorum, Sitzungsberichte der Pariser Akademie und der Londoner Royal Society), die sich über die Jahre 1638—1716 erstrecken, und nahezu 250 handschriftliche Aufzeichnungen und Randbemerkungen in Büchern, die Leibniz in den Jahren 1674—1676 gemacht hat, sind durchgearbeitet und in dem Werke genau nachgewiesen. Außerdem sind alle wichtigen Quellenwerke und Zeitschriften sowie die einschlägige zeitgenössische und moderne Literatur über Leibniz und über die vor und mit ihm lebenden Gelehrten, von denen er lernte und mit denen er in wissenschaftlichem Verkehr stand, gewissenhaft ausgewertet. Die verwickelte Problematik machte es nötig, auf zahlreiche Einzelheiten einzugehen. Sie sind nach der persönlichen Seite sowie in sachlicher und entwicklungsgeschichtlicher Hinsicht beleuchtet, so daß die verschnungen Zusammenhänge aufgeheilt werden. — So entstand ein anschauliches, zuverlässiges und getreues Bild von Leibnizens geistiger Entwicklung und wissenschaftlicher Tätigkeit in den 4 Pariser Jahren; sie beginnt mit elementaren kombinatorischen Studien des Anfängers und erreicht, getrieben von der ars inveniendi, mit der Erfindung des Calculus ihren Höhepunkt. Dieses Bild hebt sich ab vom Hintergrund eines farbenreichen Gemäldes des wissenschaftlichen Lebens im 17. Jahrhundert und ist umrahmt von jenen großen Gestalten, die wir aus der Geschichte der Mathematik jener Zeit kennen. Sie alle hören wir zu uns sprechen; denn der Verf. hat es durch meisterhafte Verwendung der indirekten Rede verstanden, uns ihre wesentlichen Ansichten in lebendiger Frische zu übermitteln. — Die mit nahezu 1000 Fußnoten belegte Darstellung ist im wesentlichen chronologisch. Sie beginnt nach kurzer Einleitung mit Leibnizens Ankunft in Paris. Sie führt über den ersten Besuch in London, die großen Entdeckungen des Jahres 1673, die erste Bekanntschaft mit den Arbeiten von Gregory und Newton und das Zusammentreffen mit Tschirnhaus zur Erfindung des Calculus, bringt dann die Auseinandersetzung um die Cartesische Methode, den



Briefwechsel mit Newton, den zweiten Aufenthalt in London und endigt mit der Übersiedlung nach Hannover. In einem Schlußabschnitt gibt der Verf. eine knappe Zusammenfassung und begründet, warum er die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik auf die Pariser Zeit beschränkt hat. Ein Verzeichnis der Namen der im Text erwähnten Personen und ihrer Schriften sowie ein sorgfältig gearbeitetes Sachverzeichnis bilden den Schluß des Werkes. — Die Bedeutung der Forschungsergebnisse des Verf. ist schon in der Besprechung der eingangs genannten Schrift angedeutet. Wenn man diese mit einer in knappen Strichen sorgfältig entworfenen Skizze vergleicht, so ist das vorliegende Werk ein bis in intime Einzelheiten ausgeführtes ebenso genaues wie farbenprächtiges Gemälde. Es ist ein Stück einer wissenschaftlichen Biographie, exemplarisch in Hinsicht auf die Exaktheit im einzelnen und auf die Weite des Gesichtsfeldes im ganzen. Es hat den Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Newton, nach beiden Seiten gerecht abwägend, endgültig geklärt. Es bringt einen großen Fortschritt der geschichtlichen Erkenntnis, der über D. Mahnkes verdienstvolle Forschungen zur Keimes- und Entwicklungsgeschichte der Höheren Analysis hinaus führt. Es dürfte für lange Zeit das letzte Wort auf diesem Gebiet der Mathematikgeschichte darstellen.

E. Löffler (Stuttgart).

• **Lambert, Johann Heinrich: Mathematische Werke. II.: Arithmetik, Algebra und Analysis.** Herausgegeben von Andreas Speiser. Zürich: Orell Füßli 1948. XXIV, 324 p. 25 S. francs.

**Higgins, T. J.: Biographies and collected works of mathematicians — Addenda.** Amer. math. Monthly 56, 310—312 (1949).

**Masotti, Arnoldo: Commemorazione di Umberto Cisotti.** Rend. Sem. mat. fisico Milano 18, 1—35 (1948).

Wissenschaftliche Würdigung mit Schriftenverzeichnis.

**Venkov, B. A.: Rodion Osievič Kužmin. (1891—1949).** Nekrolog. Uspechi mat. Nauk 4, Nr. 4 (32), 148—155 (1949) [Russisch].

Wissenschaftliche Würdigung und Schriftenverzeichnis.

**Saïni, Hugo: Max Planck.** Arch. Sci. Genève 1, 183—187 (1948).

**Thirring, Hans: Erwin Schrödinger zum 60. Geburtstag.** Acta physica Austriaca 1, 105—109 (1947).

## Analysis.

### Allgemeines:

• **Holzer, Ludwig: Mathematik von der Mittelschule zur Hochschule.** Graz-Wien: Leykam-Verlag 1948. 166 S.

Verf. will den Anfänger über die Diskontinuität zwischen Mittelschule und Hochschule dadurch hinweghelfen, daß er ihn über die in der Mittelschule nicht üblichen Methoden des Hochschulunterrichtes vorläufig informiert. Dabei legt er das Hauptgewicht auf Benutzung komplexer Größen. Beginnend mit der Einführung dieser Zahlen, werden im ersten Teil die wichtigsten Formeln und Sätze der Trigonometrie und Analytischen Geometrie unter systematischer Verwendung des Komplexen nochmals abgeleitet. Der zweite Teil bringt, ausgehend vom Dedekindschen Schnitt, etwa den Stoff einer Einführungsvorlesung in die Infinitesimalrechnung, wobei ebenfalls sich das Bestreben zeigt, das Komplexe nach Möglichkeit heranzuziehen. An manchen Stellen ergeben sich so kurze, elegante Beweise. Doch werden nicht überall die Beweise gegeben. Zahlreiche Beispiele und 465 Aufgaben, deren Resultate am Schluß des Buches zusammengestellt sind, dienen der Einübung des Stoffes. Für den Anfänger dürfte die Darstellung nicht überall leicht verständlich sein.

Willers (Dresden).

• **Angot, André: Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications.** Préface de Louis de Broglie. Paris: Éditions de la Revue d'Optique 1949. Suppl. au no. de janvier 1949 de la Revue d'Optique théorique et instrumentale.

In den Kursvorlesungen, die an den Technischen Hochschulen über Höhere Mathematik in den ersten drei Semestern gehalten werden, pflegt man den Ingenieuren und Physikern die Kenntnis der Differential- und Integralrechnung, analytischen Geometrie und gewöhnlichen Differentialgleichungen zu vermitteln. Damit ist die mathematische Ausbildung der Studierenden im wesentlichen abgeschlossen. Das mag bis zum Beginn dieses Jahrhunderts gerechtfertigt gewesen sein, ist es aber jetzt nicht mehr. Die neueren physikalischen Theorien machen von mathematischen Begriffsbildungen Gebrauch, die über diesen Stoff weit hinausgehen. Das vorliegende Buch sucht diese Lücke auszufüllen. — Es bringt auf über 600 Seiten in gedrängter Form die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Fouriersche Reihen und Integrale, Vektor-, Matrizen- und Tensorrechnung, Differentialgleichungen, hyperbolische



Funktionen, Integralsinus und -kosinus, Fehlerfunktion, Gammafunktion, Besselsche und Kugelfunktionen, Laplacesche Transformation, Wahrscheinlichkeits- und Fehlerrechnung, Methode der kleinsten Quadrate. Schwierige Existenzbeweise sind ausgelassen. In dieser Hinsicht wird auf die entsprechende Literatur verwiesen. Eine reiche Sammlung von Beispielen erläutert die Begriffe und Lehrsätze der einzelnen Kapitel. Da sich das Buch in erster Linie an Elektrotechniker wendet, sind die Beispiele meist diesem Gebiet entnommen. Sogar Tafeln für die numerischen Werte der behandelten Funktionen sind beigegeben. Das Buch dürfte nicht nur den Elektrotechnikern, sondern allen Ingenieuren und Physikern einer willkommene Hilfe sein.

Lense (München).

• **Humbert, Pierre, et Serge Colombo:** *Introduction mathématique à l'étude des théories électromagnétiques.* (Collection technique du C. N. E. T.) Fascicule 1: *Analyse vectorielle, transformation conforme, théorie du potentiel.* Paris: Libr. Gauthier-Villars, 1949. VII, 149 p. 1200 f.

## Mengenlehre:

Szmielew, Wanda: *On choices from finite sets.* Fundam. Math., Warszawa 34, 75—80 (1947).

[ $n$ ] bedeute, daß für jede Menge von paarweise elementfremden  $n$ -elementigen Mengen eine Auswahlfunktion existiert. Dann folgt [ $n$ ] aus [ $n_1$ ] und ... und [ $n_r$ ], wenn für jede additive Zerlegung von  $n$  in Primzahlen:  $n = p_1 + \dots + p_s$  wenigstens ein  $p_j$  mit einem geeigneten  $n_k$  übereinstimmt. Verf. gibt auf der Zermeloschen Basis einen einfachen induktiven Beweis für diesen von ihr entdeckten Satz (und eine leichte Verallgemeinerung), den inzwischen Mostowski [Fundam. Math., Warszawa 33, 137—168 (1945)] als Folge eines wesentlich komplizierter bewiesenen allgemeineren Satzes erkannt hat.

Hermes (Münster i. W.).

Cremer, Hubert: *Transfinite Ordnungszahlen.* Math.-physik. Semesterber., Göttingen 1, 122—129 (1949).

Es handelt sich um eine gemeinverständliche Darlegung der ersten Anfänge der Reihe der Cantorsche Ordnungszahlen der zweiten Zahlklasse. Neumer.

Bagemihl, F.: *A theorem on infinite products of transfinite cardinal numbers.* Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 19, 200—203 (1948).

Verf. bringt ein weiteres Teilergebnis hinsichtlich des von Tarski aufgeworfenen Problems, ob  $\prod_{\xi < \alpha} \aleph_{\sigma_\xi} = \prod_{\xi < \alpha} \aleph_\lambda = \aleph_\lambda^\alpha$  ist, falls  $\lambda = \lim_{\xi < \alpha} \sigma_\xi$  ( $\alpha$  ist natürlich eine Limeszahl). Er beweist, daß diese Beziehung zutrifft für eine beliebige Limeszahl  $\alpha$ , die in der Normalform  $\alpha = \omega^{\delta_1} + \dots + \omega^{\delta_n}$  ( $\delta_1 \geq \dots \geq \delta_n > 0$ ) angenommen sei, wenn im Falle  $n > 1$  die folgende Bedingung erfüllt ist:  $-\eta + \lambda = \omega^{\delta_n}$ , wobei  $\eta = \lim_{\xi < \beta} \sigma_\xi$  und  $\beta = \omega^{\delta_1} + \dots + \omega^{\delta_{n-1}}$ . (Daß obige Relation richtig ist für  $n = 1$ , d. h.  $\alpha = \omega^\delta$ , hat schon Tarski gefunden.) Eine unmittelbare Folgerung aus diesem Satz ist die Beziehung:  $\prod_{\xi < \alpha} \aleph_{\mu + \xi} = \aleph_{\mu + \alpha}^\alpha$  für beliebiges  $\mu$  und eine beliebige Limeszahl  $\alpha$  [man braucht ja nur  $\sigma_\xi = \mu + \xi$  ( $\xi < \alpha$ ) zu setzen].

Neumer (Mainz).

## Differentiation und Integration reeller Funktionen:

• **Gillespie, R. P.:** *Integration.* 4. ed. Edinburgh and London: Oliver and Boyd 1947. VIII, 132 p. 9 illus.

Die ersten vier Kapitel (I. Einleitung, II. Integration der elementaren Funktionen, III. Mehrfache Integrale, IV. Kurven- und Flächenintegrale) enthalten nur die Elemente der Integralrechnung. Erst die Kapitel V. und VII. bringen die Definition des Riemannintegrals für Integranden von einer bzw. mehreren Veränderlichen und eine strenge Begründung seiner Eigenschaften. Kapitel VI. ist den uneigentlichen Integralen mit besonderer Berücksichtigung der Gammafunktion gewidmet. [Im § 51 genügt die Vor. nur der (eigentlichen) Differenzierbarkeit nicht, um die Rektifizierbarkeit zu garantieren.] — Die vorliegende 4. Auflage unterscheidet sich von der 1. Auflage durch Vermehrung der Beispiele und Erweiterung des VI. Kapitels. Eine empfehlenswerte erste Einführung für den Anfänger.

Haupt (Erlangen).



Kappos, Demetrios A.: Ein Beitrag zur Carathéodoryschen Definition der Ortsfunktionen in Booleschen Algebren. *Math. Z.* **51**, 616—634 (1949).

Ist  $a$  ein Element einer vollständigen Booleschen Algebra  $R$  und  $a = \sum a_i$  eine Zerlegung von  $a$  in abzählbar viele paarweise fremde, nicht leere Elemente und wird jedem  $a_i$  eine reelle Zahl  $\alpha_i$  oder  $\pm \infty$  als Wert zugeordnet, so entsteht eine einfache Ortsfunktion  $f$  auf  $a$ ; sie heißt endlich, wenn alle  $\alpha_i$  endlich sind. Für diese Ortsfunktionen wird die Gleichheit, Addition und Multiplikation erklärt, ferner durch  $f \geq 0$ , wenn alle  $\alpha_i \geq 0$ , und  $f \geq g$ , wenn  $f - g \geq 0$ , eine Ordnungsbeziehung, bezüglich deren die Menge  $\mathfrak{E}$  der einfachen Ortsfunktionen einen distributiven Verband mit den konstanten Funktionen  $-\infty$  und  $+\infty$  als Nullelement bzw. Einselement bilden. Durch Hinzunahme der Dedekindschen Schnitte in  $\mathfrak{E}$  wird  $\mathfrak{E}$  zum vollständigen Verband  $\mathfrak{S}$  aller Ortsfunktionen erweitert. Dieses Vorgehen liefert einen einfacheren Zugang zu den allgemeinsten Ortsfunktionen als das ursprüngliche Verfahren von C. Carathéodory [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **14**, 351—389 (1941); dies. Zbl. **25**, 65], der von den endlichwertigen Ortsfunktionen ausgeht, die Zerlegungen von  $a$  in endlich viele  $a_i$  entsprechen. Unter den Ortsfunktionen sind die endlichen ausgezeichnet, die den endlichen gewöhnlichen reellen Funktionen entsprechen. Man erhält sie durch Schnittbildung aus den einfachen Ortsfunktionen mit nur endlichen Werten. Ist in  $R$  eine totaladditive, reduzierte und normale Maßfunktion  $\varphi$  erklärt mit  $\varphi(a) < \infty$ , so ist die Teilmenge  $R_\varphi^a$  aller Teile von  $a$  ein vollständiger Ring, und alle Ortsfunktionen auf  $a$  sind meßbar. Alle endlichen Ortsfunktionen sind Limites von Fundamentalfolgen der Menge der endlichen einfachen Ortsfunktionen. Die endlichen Ortsfunktionen lassen sich auch durch Somenskalen einführen. Es wird eine Übertragung des Satzes von Egoroff auf konvergente Folgen von endlichen Ortsfunktionen bewiesen. *G. Köthe.*

Cotlar, Mischa und Yanny Frenkel: Eine allgemeine Theorie des Integrals, die sich auf einer Verallgemeinerung des Limesbegriffes gründet. *Rev. Univ. nac. Tucumán, A* **6**, 113—159 (1947) [Spanisch].

Ein Teilsystem  $\mathfrak{P}$  von Teilmengen  $P$  einer abstrakten Menge  $S$  heißt ein  $(p)$ -System, wenn es nicht leer ist und wenn mit  $P$  auch jede Obermenge von  $P$  zu  $\mathfrak{P}$  gehört. Solche  $(p)$ -Systeme verwenden Verf. zur Begründung einer Grenzwerttheorie für auf  $S$  erklärte reelle Funktionen  $f(s)$ ,  $s \in S$ . Zum System  $\mathfrak{P}$  gehört das System  $\mathfrak{Z}$  jener Teilmengen  $Z$  von  $S$  mit  $ZP \neq 0$  für jedes  $P \in \mathfrak{P}$ .  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{P}$  bestimmen sich gegenseitig. [In der klassischen Grenzwerttheorie sind die Mengen  $P$  zu deuten als diejenigen Teilmengen eines Raumes  $S$ , welche einen festen (eigentlichen oder eventuell idealen) Punkt von  $S$  zum Berührungspunkt haben.] Eine (eigentliche oder uneigentliche) Zahl  $h$  heißt ein  $(p)$ -Häufungswert von  $f(s)$ , wenn es zu jeder Umgebung  $U_h$  von  $h$  (im gewöhnlichen Sinne) ein  $P \in \mathfrak{P}$  gibt mit  $f(s) \in U_h$  für jedes  $s \in P$ . Gibt es wenigstens einen  $(p)$ -Häufungswert, so auch einen kleinsten  $[(p)\text{-lim}]$  und einen größten  $[(p)\text{-lim}]$ , im Inzidenzfalle den  $(p)\text{-lim } f(s)$ . In dieser Allgemeinheit werden auch die Grenzwerttheorien, welche auf der Verwendung von gerichteten Systemen (Moore-Smith) oder Vernachlässigung von Teilmengen (Denjoy-Kintchine) fundieren, umfaßt. Besondere Bedeutung haben die „kompakten“  $(p)$ -Systeme [für jedes  $f(s)$  und jedes  $(p)$ -Teilsystem existiert ein  $(p)$ -Häufungswert] und die „auflösbaren“  $(p)$ -Systeme [jeder  $(p)$ -Häufungswert ist  $(p)$ -Limes eines  $(p)$ -Teilsystems], für welche verschiedene charakteristische Eigenschaften angegeben werden. Näher untersucht werden die auf Unterteilungen  $s$  eines linearen Intervalles aufgebauten  $(p)$ -Systeme. Die Anwendung auf Intervallfunktionen führt zum Begriff des (oberen, unteren)  $(p)$ -Integrals. Bleiben dabei die verwendeten Unterteilungsmengen  $P$  bei gewissen Operationen (Intervallzusammensetzungen und -schneidungen) ungeändert, so hat das  $(p)$ -Integral die üblichen klassischen Eigenschaften und heißt dann regulär. Die Integrale von Burkill und Kolmogoroff erweisen sich dabei als die schwächsten Integral-



operationen unter den regulären. In der gewöhnlichen Integrationstheorie über einem Intervall  $J$  wählt man als  $(p)$ -System das System  $(N)$  [ $Z$  ist jede Menge von Unterteilungen von  $J$ , die alle Unterteilungen einer Norm (= Länge des größten Teilintervalls)  $< \delta$ ,  $\delta > 0$ , enthält] oder das  $(p)$ -System  $(\sigma)$  [ $Z$  ist jede Menge von Unterteilungen von  $J$ , welche alle Verfeinerungen einer festen Unterteilung enthält].  $(\sigma)$  heißt das zu  $(N)$  assoziierte  $(p)$ -System. Schließlich verwendet man zur Erfassung von Singularitäten noch das  $(p)$ -System  $(\lambda)$  [ $P$  ist jede Menge von „inneren Teilungen“ von  $J$  mit inneren Teilungen beliebig kleiner Intervalllängensumme];  $(\lambda)$  heißt das dem System  $(N)$  subordinierte  $(p)$ -System. Allgemein läßt sich einem  $(p)$ -System  $P$  einer Integrationstheorie in analoger Weise ein assoziiertes und subordiniertes  $(p)$ -System zuweisen. Zwischen den zugehörigen Ober- und Unterintegralen bezüglich dieser drei  $(p)$ -Systeme gelten wichtige Beziehungen, welche als Verallgemeinerung von Sätzen aus der Riemann-, Stieltjes- und Lebesgueschen Integrationstheorie anzusehen sind. Es wird noch angedeutet, wie man im Rahmen dieser Betrachtungen die Integration in Produkträumen aufbauen kann. Derivierte werden nicht betrachtet.

Aumann (Würzburg).

**Lorentz, G. G.:** A problem of plane measure. Amer. J. Math. 71, 417—426 (1949).

Sei  $A$  eine meßbare Punktmenge endlichen Maßes in einer  $(x, y)$ -Ebene,  $A_{x_0}$  bzw.  $A_{y_0}$  der Schnitt von  $A$  mit  $x = x_0$  bzw.  $y = y_0$ . Bezeichnet  $m$  das lineare Lebesguesche Maß, so heißen  $P(x) = mA_{x_0}$  und  $Q(y) = mA_{y_0}$  die Schnittfunktionen von  $A$ . Eine zur nicht negativen, meßbaren Funktion  $R(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) gehörige, nichtsteigende, maßgleiche Umordnung werde mit  $r(z)$  bezeichnet; für die nichtsteigende, meßbare Funktion  $r(z)$  ( $z > 0$ ) gilt:  $m[\alpha \leq r(\hat{z})] = m[\alpha \leq R(\hat{x})]$  für alle  $\alpha$ . Verf. beweist: 1. Damit  $P(x)$  und  $Q(y)$  Schnittfunktionen einer ebenen meßbaren Menge  $A$  sind, ist notwendig und hinreichend, daß für die nichtsteigenden, maßgleichen Umordnungen  $p(z)$  und  $q(z)$  dieser Funktionen die folgenden Un-

gleichungen für  $z > 0$  erfüllt sind ( $q^{-1}$  Umkehrung von  $q$ , usw.):  $\int_0^z p(u) du \leq \int_0^z q^{-1}(u) du$ ,  $\int_0^z q(u) du \leq \int_0^z p^{-1}(u) du$ . — 2.  $A$  ist dann und nur dann eindeutig bis auf Nullmengen bestimmt, wenn  $p(z)$  und  $q(z)$  Umkehrung voneinander sind ( $p = q^{-1}$ ). — Eine einfache Konstruktion lehrt, daß  $A$  nicht durch  $P(x)$  und  $Q(y)$  allein, allgemeiner auch nicht durch endlich viele Schnittfunktionen bezüglich endlich vieler Richtungen in der Ebene festgelegt werden kann. Es werden noch weitere Fragen angeschnitten, betreffend die Fälle, daß  $A$  unendliches Maß oder konvexe Gestalt hat.

Aumann (Würzburg).

**Scorza-Dracconi, G.:** Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 17, 102—106 (1948).

Die Funktion  $f(x, y)$  sei in einem Rechteck  $R$  ( $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ ;  $a < b$ ,  $c < d$  endlich) definiert, daselbst endlich, bez.  $x$  (Lebesgue-)integrabel und bez.  $y$  stetig. Verf. beweist, daß man zu gegebenem (beliebig kleinem)  $\varepsilon > 0$  immer eine in  $[a, b]$  enthaltene perfekte Menge  $E$  bestimmen kann, so daß Maß  $E > b - a - \varepsilon$  und daß  $f(x, y)$  in dem entsprechenden perfekten Teil von  $R$ , der aus den Punkten von  $R$  mit Abszissen in  $E$  besteht, stetig ist.

Tullio Viola (Rom).

**Dubrovsky (Dubrovskij), V.:** Remarks to my paper „On some properties of completely additive set functions and passing to the limit under the integral sign“. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 11, 101—103 und engl. Zusammenfassg. 104 (1947) [Russisch].

**Reichelderfer, Paul V.:** The essential part of a surface. Bull. Amer. math. Soc. 53, 845—855 (1947).

Die Lebesguesche Definition des Flächeninhalts  $O(S)$  einer stetigen Fläche  $S$  als größte untere Schranke aller  $\liminf O(P_n)$ , wo  $O(P_n)$  den Flächeninhalt einer



gegen  $S$  konvergenten Folge von Polyedern  $P_n$  bezeichnet, ist in völlig analoger Weise auch für die Länge  $L(C)$  einer stetigen Kurve  $C$  verwendbar.  $L(C)$  ergibt sich aus der Parameterdarstellung  $(x_i(t))$  z. B. in der Form  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{J \in \mathfrak{Z}_n} \left\{ \sum_{i=1}^3 [\int N(x_i, J)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$ , wo  $\mathfrak{Z}_n$  eine Zerlegung des Parameterintervalls in Intervalle  $J$  einer Länge  $< 1/n$  und  $N(x_i, J)$  die Anzahl der Lösungen  $t$  der Gleichung  $x_i(t) = x_i$  mit  $t \in J$ , und  $\int N(x_i, J)$  im Summierbarkeitsfalle das Lebesguesche Integral von  $N(x_i, J)$ , d. h. die Totalvariation der Funktion  $x_i(t)$  im  $t$ -Intervall  $J$ , sonst  $+\infty$  bezeichnen, d. h. in expliziter Form mittels gewöhnlicher arithmetischer, Integral- und Limesoperationen. Bei  $O(S)$  dagegen stößt man bei der Suche nach einer von einer Parameterdarstellung  $(x_i(u, v))$  ausgehenden, mittels solcher gewöhnlicher Operationen gebildeten Formel auf erhebliche Schwierigkeiten. T. Radó hat gezeigt, daß im Spezialfalle  $x_1 = u$ ,  $x_2 = v$ ,  $x_3 = z(u, v)$ ,  $0 \leq u, v \leq 1$  eine solche Formel existiert. Man nehme eine Folge von Zerlegungen  $\mathfrak{Z}_n$  des Parameterquadrates in Rechtecke  $R = [u' \leq u \leq u'', v' \leq v \leq v'']$  mit Durchmessern  $< 1/n$ . Dann ist

$$O(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{R \in \mathfrak{Z}_n} \left\{ \left[ \int_{v'}^{v''} |z(u'', v) - z(u', v)| dv \right]^2 + \left[ \int_{u'}^{u''} |z(u, v'') - z(u, v')| du \right]^2 + [(u'' - u')(v'' - v')]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Bei allgemeiner Parameterdarstellung ist aber eine Formel der Art, wie oben für  $L(C)$ , nicht möglich, wie am Beispiel einer mittels einer Peanokurve konstruierten Fläche gezeigt wird. Jedoch gilt eine Darstellung

$$L(S) = \text{ob. Grenze}_{\mathfrak{Z}} \sum_{G \in \mathfrak{Z}} \left\{ \sum_{i=1}^3 \iint k_i(G) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

wo allgemein  $\mathfrak{Z}$  eine „innere Teilung“, d. h. ein System  $((G))$  von fremden, offenen Teilen des Parameterquadrates und  $k_i(G)$  die wesentlichen Multiplizitätszahlen der Projektion von  $S$  in der  $x_i$ -Richtung über  $G$  bezeichnen. Die Integrale  $\iint k_i(G)$  sind das Maß des „wesentlichen Teils“ dieser Projektionen. Hinsichtlich Einzelheiten wird häufig auf das inzwischen erschienene Buch von T. Radó, *Length and area*, Amer. math. Soc. Coll. Publ., vol. 30, New York 1948, verwiesen. Aumann.

**Mambriani, A.:** Sull'approssimazione dell'integrale di Lebesgue per le funzioni di una variabile. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 2, 173—181 (1947).

Im Hinblick auf die Anwendungen zur Lösung des Problems von Geöcze über Quadratur der Flächen [vgl. T. Radó, Amer. J. Math. 65, 361—381 (1943)] beweist Verf., daß eine Funktion  $f(x)$ , die in einem Intervall  $[a, b]$  quasistetig und dort nach Lebesgue integrierbar ist, die folgenden Eigenschaften besitzt: 1. Zu jedem beliebigen  $\varepsilon > 0$  läßt sich ein System von Punkten  $x_1, x_2, \dots, x_m$  mit  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$ ,  $x_1 - a < \varepsilon$ ,  $b - x_m < \varepsilon$ ,  $x_{i+1} - x_i < \varepsilon$  ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ) so bestimmen, daß

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) f(x'_i) \right| < \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x'_i)| dx < \varepsilon$$

gilt (wobei  $x'_i = x_i$  oder  $x'_i = x_{i+1}$ ). 2. Zu jedem beliebigen  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß

$$\sum_{i=1}^{m-1} \int_{l_i} |f(x) - \mu_i| dx < \varepsilon$$

ist für jede Unterteilung von  $[a, b]$  in Intervalle  $l_1, l_2, \dots, l_m$ , alle von Längen  $< \delta$ , und für

$$\mu_i = \frac{1}{\text{Maß } l_i} \int f(\xi) d\xi \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad \text{Tullio Viola (Rom).}$$



Ayer, Miriam C. and Tibor Radó: A note on convergence in length. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 533—539 (1948).

Es sei  $\mathbf{r}_n(t) = (x_n(t), y_n(t), z_n(t))$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , eine Folge von Raumkurven, deren Komponenten stetig und von beschränkter Variation sind. Notwendig und hinreichend dafür, daß die  $\mathbf{r}_n(t)$  gleichmäßig gegen ein gleichartiges  $\mathbf{r}_0(t)$  konvergieren und zugleich die Längen der  $\mathbf{r}_n$  gegen die von  $\mathbf{r}_0$ , ist, daß bei jeder Wahl der Konstanten  $a, b, c$  die Funktionenfolge der  $f_n(t) = ax_n(t) + by_n(t) + cz_n(t)$  gleichmäßig gegen eine stetige Funktion  $f_0(t)$  beschränkter Variation und zugleich die Totalvariation der  $f_n(t)$  gegen die von  $f_0(t)$  konvergieren. Dies ist eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von A. P. Morse [Trans. Amer. math. Soc. **41**, 48—83 (1937); dies. Zbl. **16**, 105]. Bewiesen wird sie mittels einer, in ihrer elementaren Form auf Cauchy zurückgehenden Integralformel, welche die Länge einer Raumkurve durch ein zweidimensionales Integral über die Einheitskugel darstellt.

Aumann (Würzburg).

Orlicz, W.: Une généralisation d'un théorème de Cantor-Lebesgue. Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 38—45 (1948).

Verf. beweist folgenden Satz 1: Die reellen Funktionen  $f_i(x)$  ( $i = 1, \dots, k$ ) seien auf der ganzen Geraden definiert mit der Periode  $l$ , stark linear unabhängig im Intervall  $(0, l)$  und an höchstens abzählbar vielen Stellen unstetig. — Wenn für jedes  $x$  aus einer rationalen Basis  $B$  die Folge  $a_n^{(1)} f_1(\omega_n x + \vartheta_n) + \dots + a_n^{(k)} f_k(\omega_n x + \vartheta_n)$  für  $n \rightarrow \infty$  nach 0 strebt bzw. beschränkt bleibt, dann sind auch die Folgen  $a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(k)}$  konvergent nach 0 bzw. beschränkt. Dabei bedeutet  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$  eine beliebige und  $\omega_1, \omega_2, \dots$  eine nach  $+\infty$  strebende Folge reeller Zahlen. — Verf. nennt die Funktionen  $f_1(x), \dots, f_k(x)$  in  $\langle a, b \rangle$  stark linear unabhängig, wenn für  $k$  reelle Zahlen  $p_1, \dots, p_k$ , die nicht alle  $= 0$  sind, die Relation  $p_1 f_1(x) + \dots + p_k f_k(x) = 0$  in höchstens abzählbar vielen Punkten  $x \in \langle a, b \rangle$  stattfindet. — Rationale Basis heißt eine Menge  $B$  von Punkten eines Intervalls  $\langle a, b \rangle$ , wenn für jede reelle Zahl  $x$  mindestens eine Darstellung der Form  $x = r_1 x_1 + \dots + r_n x_n$  möglich ist mit  $x_i \in B$  und rationalen  $r_i$ . — Wählt man  $n = 2$ ,  $f_1(x) = \cos x$ ,  $f_2(x) = \sin x$ ,  $\omega_n = n$ ,  $\vartheta_n = 0$  und für  $B$  eine Menge positiven Maßes (solche Mengen sind rationale Basen), dann ergibt sich der bekannte Satz von Cantor-Lebesgue. — Dieser Satz folgt aber auch aus nachstehendem Spezialfall von Satz 1: Satz 2. Ist die reelle Funktion  $f(x)$  mit der Periode  $l$  in höchstens abzählbar vielen Punkten unstetig oder Null, hat man ferner für jedes  $x$  einer rationalen Basis  $B$ :  $a_n f(\omega_n x + \vartheta_n) \rightarrow 0$ , so gilt auch  $a_n \rightarrow 0$ . — Denn man hat nur zu beachten, daß  $a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(nx + \vartheta_n)$ . — Daß die Beschränkung auf höchstens abzählbar viele Unstetigkeits- bzw. Nullstellen in Satz 2 notwendig ist, zeigt Verf. durch Gegenbeispiele.

Neumer (Mainz).

Cotlar, Misha: Erweiterung des Rolleschen Theorems auf stetige Transformationen der Ebene. Math. Notae, Rosario **8**, 79—84 (1948) [Spanisch].

Unter der Voraussetzung, daß für die stetige Abbildung  $x' = u(x, y)$ ,  $y' = v(x, y)$  eines ebenen Gebietes im wesentlichen überall alle ersten partiellen Ableitungen existieren und dabei  $u(x, y)$  auf der Begrenzung von  $G$  konstant ist, läßt sich das Verschwinden der Funktionaldeterminante von  $x'$  und  $y'$  in einer unendlichen irreduziblen Menge im Innern von  $G$  nachweisen. Bei dieser Übertragung des Rolleschen Satzes auf das Zweidimensionale tritt an Stelle des Extremums im eindimensionalen Fall der „starke Bildbegrenzungspunkt“, d. h. ein Begrenzungspunkt des Bildes von  $G$  in der  $(x', y')$ -Ebene, der eine bildfreie Stützkreissscheibe gestattet.

Aumann (Würzburg).

Kloosterman, H. D.: Über Ableitungen und Differenzen. Actual., Math. Centrum Amsterdam ZW 1948, 015, 10 S. (hektographiert) [Holländisch].

In Verfolg früherer Arbeiten [Mathematica, Zutphen **8**, 1—11 (1939); J.

London math. Soc. **15**, 91—96 (1940); dies. Zbl. **21**, 220; **26**, 108] behandelt Verf. Sätze von folgender Art: Sei die reelle Funktion  $f(x)$  für  $x \geq A > 0$  mindestens  $(r+1)$ -mal differenzierbar, ferner  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x^r = b$  und  $f^{(r+1)}(x) > -C/x$  für alle  $x$ , wo  $C$  eine positive Konstante bezeichnet, dann ist  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(r)}(x) = r!b$ . Das

„diskrete“ Analogon dazu ist ein Satz über Reihen: Ist  $\sum a_n(C, r)$ -summierbar, ferner  $a_n > -C/n$  für alle  $n$ , so ist  $\sum a_n$  sogar konvergent. Mit dem Beweis des ersten Satzes, welcher sich in einfacher Weise aus folgendem Mittelwertsatz für höhere Differenzen ergibt, nämlich:

$$(1) \quad \Delta_h^r f(x)/h^r = f^{(r)}(x) + P_1(r) h f^{(r+1)}(x) + \dots + P_{k-1}(r) h^{k-1} f^{(r+k-1)}(x) + P_k(r) h^r f^{(r+k)}(\xi)$$

mit  $x < \xi < x + rh$ , wobei die  $P_n$  durch  $\left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(r) t^n$  erklärt sind, ist auch für das diskrete Analogon ein einfacherer Beweis als die bisherigen gefunden. Von (1) kommt man leicht zu

$$(2) \quad \sum_{v=0}^{k-1} Q_v(r) h^v \frac{\Delta_h^{r+v} f(x)}{h^{r+v}} = f^{(r)}(x) + h^k \sum_{v=0}^{k-1} Q_v(r) P_{k-v}(r+v) f^{(r+k)}(\xi_v)$$

mit  $x < \xi_v < x + (r+k-1)h$  und  $Q_v(r)$  erklärt durch  $\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)^r = \sum_{v=0}^{\infty} Q_v(r) t^v$ .

Auf (2) fußt eine Verallgemeinerung des oben ausgesprochenen Satzes:  $f(x)$  sei  $(r+k)$ -mal differenzierbar für  $x \geq A > 0$  mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x^r = b$  und  $|f^{(r+k)}(x)| < C/x^k$  für alle  $x$ . Dann ist  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(r)}(x) = r!b$ . (2) führt zu

$$(3) \quad f^{(r)}(x) = \sum_{v=0}^{k-1} Q_v(r) h^v \frac{\Delta_h^{r+v} f(x)}{h^{r+v}} + Q_k(r) h^k f^{(r+k)}(\xi)$$

mit  $x < \xi < x + (r+k-1)h$ . Die Entwicklung  $\left(\frac{1 - (1+t)^{-1/k}}{t}\right)^r = \sum_{v=0}^{\infty} q_v(r) t^v$  stellt die Verbindung her mit den analogen Formeln des zugehörigen „diskreten“ Falles. Als eine Anwendung von (3) führt Verf. folgenden Satz an: Ist  $f(x)$  in  $-1 \leq x \leq 1$  genügend oft differenzierbar und  $M_t = \max |f^{(t)}(x)|$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ), dann gilt

$$M_r \leq 2^{k+1} e^{r+k} M_0^{1-r/(r+k)} M_{r+k}^{r/(r+k)}, \quad \text{falls } M_{r+k} \geq (2r+2k)^{r+k} M_0, \\ \leq 2^{r+k+1} e^{r+k} M_0, \quad \text{falls } M_{r+k} < (2r+2k)^{r+k} M_0.$$

Sätze dieser Art sind bereits von A. Gorny [Acta math., Uppsala **71**, 317—358 (1939); dies. Zbl. **22**, 154], M. Riesz [Acta Litt. Sci. Univ., Szeged, Sect. Sci. math. **1**, 114—126 (1923)] und von A. L. Dixon und W. L. Ferrar [J. London math. Soc. **7**, 87—93 (1932); dies. Zbl. **4**, 252] bewiesen worden. Aus (3) ergibt sich auch ein Beweis einer Ungleichung von R. P. Boas und G. Pólya [Influence of the signs of the derivatives of a function on its analytic character, Duke Math. J. **9**, 406—424 (1942)] mit einer viel besseren Konstanten, nämlich: Sind  $p$  und  $q$  natürliche Zahlen und ist die reelle Funktion  $g(x)$  mindestens  $(p+2q)$ -mal differenzierbar in  $-1 \leq x \leq 1$ , wobei in diesem Intervall  $|g(x)| \leq M$  und  $g^{(p+2q)}(x) \leq 0$ , dann ist  $g^{(p)}(x) \leq C(p, q) M$  mit  $C(p, q) \leq (2e)^{p+2q} (p+2q-1)^p$ .

Aumann (Würzburg).

### Allgemeine Reihenlehre:

Hamilton, Hugh J.: Mertens' theorem and sequence transformations. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 784—786 (1947).

Es handelt sich in der Arbeit um das Cauchysche Produkt konvergenter Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = A$  und  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i = B$ . Die eine soll „a-Reihe“, die andere „b-Reihe“,



und ihr Cauchysches Produkt  $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$  „ $c$ -Reihe“ genannt werden. Über die Existenz und die Größe der Summe der „ $c$ -Reihe“ gibt eine hinreichende Bedingung der bekannte Mertenssche Satz. Zu diesem Thema wird ein äußerst einfacher Beweis des folgenden Satzes gegeben: Satz I. Hinreichend und notwendig dafür, daß das Cauchysche Produkt einer „ $a$ -Reihe“ und jeder „ $b$ -Reihe“ konvergiert und den Grenzwert  $A \cdot B$  besitzt, ist die absolute Konvergenz der Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  gegen  $A$ . — Der Satz

wird auf konvergente Doppelreihen  $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j} = A$  und  $\sum_{i,j=0}^{\infty} b_{i,j} = B$  übertragen.

Hier wird unter Cauchyschem Produkt die Reihe  $\sum_{k,l=0}^{\infty} \sum_{i,j=0}^{k,l} a_{i,j} b_{k-i,l-j}$  verstanden.

Bezüglich solcher Reihen werden die folgenden Sätze in kurzer Weise bewiesen. Satz II. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Cauchysche Produkt einer doppelten „ $a$ -Reihe“ und jeder beschränkt-konvergenten „ $b$ -Reihe“ gegen  $A \cdot B$  konvergiere, ist die absolute Konvergenz der „ $a$ -Reihe“. — Satz III. Notwendig und hinreichend dafür, daß das Cauchysche Produkt einer „ $a$ -Reihe“ und jeder konvergenten „ $b$ -Reihe“ gegen  $A \cdot B$  konvergiere, ist, daß die „ $a$ -Reihe“ nur endlich viele von Null verschiedene Glieder enthält. *St. Fenyö.*

\* Wing, G. Milton: Summability with a governor of integral order. Bull. Amer. math. Soc. 55, 146—155 (1949).

Als Regulator („governor“) der Reihe  $a_0 + a_1 + \dots$  definierte G. Piranian [Bull. Amer. math. Soc. 52, 882—889 (1946)] die Matrix  $c_{\mu\nu} = |a_{\mu-\nu}| / (|a_0| + \dots + |a_{\mu}|)$ . Verallgemeinernd definiert Verf. den Regulator  $k$ -ter Ordnung rekursiv durch:  $p_\nu(0) = |a_\nu|$ ,  $p_\nu(k) = p_0(k-1) + \dots + p_\nu(k-1)$ ,  $c_{\mu\nu}^{(k)} = p_{\mu-\nu}(k) / p_\mu(k+1)$ . Die Reihe  $a_0 + a_1 + \dots$  mit den Abschnitten  $s_\nu = b_0 + \dots + b_\nu$  wird als  $(G, k)$ -summierbar bezeichnet, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_{n0}^{(k)} s_0 + \dots + c_{nn}^{(k)} s_n)$  existiert. Wenn eine Reihe durch

einen ihrer Regulatoren summierbar ist, dann ist sie es auch durch jeden ihrer Regulatoren höherer Ordnung. — Wenn eine Reihe durch das Cesàrosche Verfahren  $k$ -ter Ordnung summierbar ist, dann ist sie es auch durch ihren Regulator  $k$ -ter Ordnung. — Ferner wird folgender Satz von Piranian [l. c.] neu bewiesen: Für jedes Polynom  $f(x)$  mit reellen Koeffizienten ist die Reihe  $f(0) - f(1) + f(2) - \dots$   $(G, 1)$ -summierbar. *R. Schmidt (München).*

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Džrbašjan, M. M.: Über ein Extremalproblem aus der Theorie der gewogenen Orthogonalpolynome. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 12, 555—568 (1948) [Russisch].

Soit  $h(z)$  une fonction positive et bornée dans le cercle  $|z| < 1$  qui reste constante sur la circonférence  $C_\varrho (|z - (1-\varrho)| = \varrho)$ ,  $0 < \varrho < 1$ . Désignons par  $\lambda(\varrho)$  la valeur de la fonction  $h(z)$  sur  $C_\varrho$ , et supposons que  $\lambda(\varrho)$  soit non décroissante pour  $0 < \varrho < 1$ . Désignons par  $A_\lambda$  la classe des fonctions  $f(z)$ , holomorphes dans  $|z| < 1$  et qui y satisfont aux conditions:

$$\int_{|z|<1} h(z) |f(z)|^2 dx dy < \infty, \quad \inf_{\{Q\}} \int_{|z|<1} h(z) |f(z) - Q(z)|^2 dx dy = 0,$$

pour tous les polynomes  $\{Q\}$ . L'auteur démontre les théorèmes suivants: 1. Dans la classe  $A_\lambda$  le minimum de l'intégrale  $\mu(f) = \int_{|z|<1} h(z) |f(z)|^2 dx dy$  sous la condition

$f(\alpha) = 1$  ( $|\alpha| < 1$ ) donne la fonction

$$f_0(z) = \left( \frac{1-\alpha}{1-z} \right)^2 \frac{\Phi(z, \bar{\alpha})}{\Phi(\alpha, \bar{\alpha})},$$



$$\text{où} \quad \Phi(z, \bar{\alpha}) = \int_0^{\infty} p(t) \exp \left\{ -t \left( \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-\bar{\alpha}} \right) \right\} dt, \quad \frac{1}{p(t)} = \int_0^1 \lambda(\varrho) e^{-t\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho^2},$$

$$\mu_0 = \inf \mu(f) = \frac{\pi |1-\alpha|^4}{\Phi(\alpha, \bar{\alpha})}.$$

— Soient  $p_n(z) = c_{n0}z^n + c_{n1}z^{n-1} + \dots$ ,  $c_{n0} > 0$ , des polynômes qui satisfont à la condition

$$\int_{|z| < 1} h(z) p_n(z) \overline{p_m(z)} dx dy = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

2. Pour  $|\alpha| < 1$  la série  $K(z, \bar{\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{p_n(\alpha)} p_n(z)$  converge absolument et uniformément dans chaque domaine fermé de  $|z| < 1$  et on a

$$K(z, \bar{\alpha}) = \frac{\Phi(z, \bar{\alpha})}{\pi (1-z)^2 (1-\bar{\alpha})^2}.$$

3. Chaque fonction  $f(z)$  de la classe  $A_\lambda$  a la forme

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{\pi (1-z)^2} \iint_{|w| < 1} h(w) F(w) \frac{\Phi(z, w)}{(1-w)^2} du dv, \quad w = u + iv,$$

où  $F(w)$  est une fonction, pour laquelle on a

$$(2) \quad \iint_{|w| < 1} h(w) |F(w)|^2 du dv < \infty.$$

Entre tous les fonctions  $F(w)$ , qui représentent la fonction donnée  $f(z)$  de la classe  $A_\lambda$  selon la formule (1) le minimum de l'intégrale (2) est atteinte pour la fonction  $f(w)$ .

N. Obrechhoff (Sofia).

Bezljudnyj, A. S.: Über die Annäherung periodischer Funktionen von zwei Veränderlichen durch trigonometrische Interpolationspolynome. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 65, 257—260 (1949) [Russisch].

Verf. beweist auf elementarem Wege folgenden Satz: Es sei die Funktion  $f(x, y)$  bezüglich beider Veränderlicher von der Periode  $2\pi$  und genüge den beiden Ungleichungen

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \leq M |x_2 - x_1|^\alpha + N |y_2 - y_1|^\beta,$$

$$|f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1) + f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| \leq C |x_2 - x_1|^\alpha |y_2 - y_1|^\beta$$

mit gewissen Konstanten. Man betrachte ferner das trigonometrische Interpolationspolynom

$$S_{mn}(f, x, y) = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{k,l} \frac{\sin \frac{1}{2}(2m+1)(x-x_k^{(m)})}{2 \sin \frac{1}{2}(x-x_k^{(m)})} \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)(y-y_l^{(n)})}{2 \sin \frac{1}{2}(y-y_l^{(n)})} f(x_k^{(m)}, y_l^{(n)}),$$

die Summen laufen über die Punkte  $(x_k^{(m)}, y_l^{(n)}) = (2k\pi/(2m+1), 2l\pi/(2n+1))$ ,  $-m \leq k \leq +m$ ,  $-n \leq l \leq +n$ . Dann gilt für alle solche  $f(x, y)$  die asymptotische Gleichung

$$\begin{aligned} \limsup |f(x, y) - S(f, x, y)| &= \frac{M \log m}{\pi^{1-\alpha} m^\alpha} \left| \sin \frac{2m+1}{2} x \right| + \frac{N \log n}{\pi^{1-\beta} n^\beta} \left| \sin \frac{2n+1}{2} y \right| \\ &\quad + O(m^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}) + O\left(\frac{\log m \log n}{m^\alpha n^\beta}\right), \end{aligned}$$

die nicht verbessert werden kann.

W. Hahn (Berlin).

Civin, Paul: Mean values of periodic functions. Bull. Amer. math. Soc. 53, 530—535 (1947).

Für  $1 \leq p < \infty$  sei  $M_p(f) = \left( \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$  und  $M_\infty(f)$  = wesentl. Supremum von  $f(x)$  für  $0 \leq x \leq 2\pi$ .  $L^p$  sei die Klasse der komplexwertigen meßbaren Funktionen  $f(x)$  mit beschränktem  $M_p(f)$  und  $K_{m,p}$  die Teilklasse von  $L^p$  mit zugehörigen Fourierreihen der Form

$$(1) \quad \sum_{n \geq m} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$



Die Fourierreihen der Funktionen  $f$  von  $K_{m,p}$  werden transformiert mittels einer reellen Zahl  $\delta$  und einer Folge von reellen Zahlen  $\lambda = (\lambda(n))$  in

$$(2) \quad \sum_{n \geq m} \lambda(n) \{a_n \cos(nx + \delta\pi/2) + b_n \sin(nx + \delta\pi/2)\}.$$

Dies liefert immer dann eine Fourierreihe aus  $L^p$ , wenn  $\sum_{n \geq m} \lambda(n) \cos(nx - \delta\pi/2)$  eine solche ist. Mit dieser letzten Bedingung ist die Transformation (1)  $\rightarrow$  (2) eine Abbildung  $f \rightarrow g$  von  $K_{m,p}$  in sich. Zwischen  $M_p(f)$  und  $M_p(g)$  besteht eine Ungleichung der Form  $M_p(g) \leq C \cdot M_p(f)$  mit einem von  $f$  unabhängigen  $C$ . Für  $C$  wird eine Abschätzung hinsichtlich seiner Abhängigkeit von  $m, p, \delta$  und  $\lambda$  gegeben unter Verwendung der  $C$ -Werte für die Spezialfälle  $p = 2$  und  $p = \infty$  [der letzte Fall ist bereits von B. v. Sz. -Nagy, Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-phys. Kl. 90, 103—134 (1938)] behandelt worden. Die Transformationen mit  $\delta = -\alpha, \lambda(n) = n^{-\alpha}$  werden des näheren untersucht. *Aumann* (Würzburg).

**Loo, Ching-Tsün:** Note on the properties of Fourier coefficients. Amer. J. Math. 71, 269—282 (1949).

Es sei  $f(x) \sim \sum_1^\infty a_n \cos nx$  die Fourierreihe einer  $L$ -Funktion und  $A_{n^*} = n^{-1} \sum_1^n a_k, A_n^* = \sum_n^\infty a_k/k, n = 1, 2, \dots$ . Wenn die Reihen

$$(1) \quad \sum_1^\infty A_n \cos nx, \quad (2) \quad \sum_1^\infty A_n \sin nx, \quad (3) \quad \sum_1^\infty A_n^* \cos nx, \quad (4) \quad \sum_1^\infty A_n^* \sin nx$$

existieren und Fourierreihen sind, dann nennen wir  $F_1, F_2, F_3, F_4$  ihre erzeugenden Funktionen. Hardy [Mess. Math. 58, 50—52 (1928)] hat bewiesen: wenn  $f$   $L^p$ -integrierbar,  $p \geq 1$ , ist, dann sind (1), (2) Fourierreihen und  $F_1, F_2$   $L^p$ -integrierbar. Bellman [Bull. Amer. math. Soc. 50, 741—744 (1944)] hat bewiesen: wenn  $f$   $L_p$ -integrierbar ist,  $p > 1$ , dann sind (3), (4) Fourierreihen und  $F_3, F_4$   $L^p$ -integrierbar. Verf. untersucht die Fälle  $p = 1$  und  $p = \infty$ . — I. Wenn  $|f \log |f||$   $L$ -integrierbar ist, dann ist (3) eine Fourierreihe und  $F_3$   $L$ -integrierbar; wenn  $|f \log^2 |f||$   $L$ -integrierbar ist, dann ist auch (4) eine Fourierreihe und  $F_4$   $L$ -integrierbar. II. Wenn  $|f| \leq 1$ , dann ist  $|F_3| \leq 2, \exp |F_1|, \exp |F_4|$   $L$ -integrierbar und auch  $\exp \lambda |F_2|^{\frac{1}{2}}$   $L$ -integrierbar, wenn  $\lambda < \pi^{\frac{1}{2}}$ . — Es sei nun  $g(x) \sim \sum_1^\infty b_n \sin nx$  die Fourierreihe einer  $L$ -integrierbaren Funktion. Nehmen wir vier Reihen, analog zu den vorhergehenden, und nennen wir  $G_1, G_2, G_3, G_4$  die bezüglichen Funktionen. I'. Wenn  $|g \log |g||$   $L$ -integrierbar ist, dann sind die zu (3) und (4) analogen Reihen Fourierreihen und die Funktionen  $G_3, G_4$  sind  $L$ -integrierbar. II'. Wenn  $|g| \leq 1$ , dann ist  $|G_4| \leq 1, \exp \lambda |G_2|$  ist  $L$ -integrierbar, wenn  $\lambda < \pi/2, \exp \lambda |G_3|$  ist  $L$ -integrierbar, wenn  $\lambda < \pi/2$  und  $\exp \lambda |G_1|^{\frac{1}{2}}$  ist  $L$ -integrierbar, wenn  $\lambda < \pi^{\frac{1}{2}}$ . *L. Cesari.*

### Funktionentheorie:

**Bers, Lipman:** On rings of analytic functions. Bull. Amer. math. Soc. 54, 311—315 (1948).

Die eindeutigen regulären analytischen Funktionen in einem Gebiet  $D$  bilden einen kommutativen Ring  $R(D)$ . Jede konforme Abbildung  $\xi = \Phi(z)$ , ebenso jede antikonforme Abbildung  $\zeta = \Phi(z)$  von  $D$  auf das Gebiet  $\Delta$  erzeugt einen Isomorphismus der Ringe  $R(D)$  und  $R(\Delta)$  ( $f(z) = f^*[\Phi(z)]$  bzw.  $f(z) = f^*[\Phi(z)]$ ). Es gilt nun umgekehrt: Sind die Ringe  $R(D)$  und  $R(\Delta)$  isomorph, so gibt es eine konforme oder antikonforme Abbildung von  $D$  auf  $\Delta$ . Wenn  $D$  und  $\Delta$  Randpunkte haben, so wird jeder Isomorphismus zwischen  $R(D)$  und  $R(\Delta)$  durch eine konforme oder antikonforme Abbildung von  $D$  auf  $\Delta$  erzeugt [jeder Isomorphismus ist also ein Homöomorphismus, d. h. aus  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  in jeder beschränkten abgeschlossenen Teilmenge von  $D$  folgt  $f_n^*(\zeta) = f(\zeta)$  entsprechend in  $\Delta$ ]. *G. Köthe.*



Cowling, V. F.: Analytic continuation of factorial series. Amer. J. Math. **71**, 283—286 (1949).

Verf. zeigt: Eine Fakultätenreihe  $f(z) = \sum a_n n! / z(z+1) \cdots (z+n)$  kann über ihre Konvergenzabszisse  $\gamma < \infty$  hinaus unter Ausschluß der Punkte  $0, -1, -2, \dots$  bis zur Geraden  $\Re(z) = l_1$  analytisch fortgesetzt werden, wenn eine analytische Funktion  $a(w)$  mit folgenden Eigenschaften existiert: a) Es existiert eine nicht ganze Zahl  $h > |l_1|$ , so daß in einem Gebiet  $A(h, \psi_1, \psi_2)$  [das sind alle Punkte  $w$  mit  $\psi_2 \leq \arg(w-h) \leq \psi_1$ ] die Funktion  $a(w)$  regulär ist. Dabei soll  $-\pi/2 \leq \psi_2 < 0 < \psi_1 \leq \pi/2$  sein. b) Es ist  $a(n) = a_n$  für alle  $n > h$ . c) In dem Gebiet  $A(h, \psi_1, \psi_2)$  soll  $a(h + Re^{i\psi}) = O[R^k \exp(-LR \sin \psi)]$  mit  $0 < L < 2\pi$  sein. Maack (Hamburg).

Beckenbach, E. F., W. Gustin and H. Shniad: On the mean modulus of an analytic function. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 184—190 (1949).

Es sei  $f(z)$  eine regulär analytische Funktion für  $|z| < 1$ . Der Mittelwert

$$M_t(r; f) = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^t d\theta \right]^{1/t}$$

ist für festes  $t$  ( $0 \leq t \leq \infty$ ) eine für  $0 \leq r < 1$  stetige, nicht-negative, nicht-abnehmende Funktion von  $r$ , welche eine stetige Ableitung besitzt [Pólya und Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, Berlin 1925, 143—144; Hardy, Proc. London math. Soc., II. s. **14**, 269—277 (1915)]. Sei jetzt  $T(f)$  diejenige Menge der  $t$ -Werte, für welche  $M_t(r; f)$  eine für  $0 \leq r < 1$  konvexe Funktion von  $r$  ist.  $T(f)$  ist kompakt. Folgender Satz wird bewiesen:  $T(f)$  enthält die Werte  $t = 2/k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) und  $t = 0$ . Wenn  $f$  höchstens  $k$  Nullstellen hat, so enthält  $T(f)$  das Intervall  $0 \leq t \leq 2/k$ . Wenn  $f(0) = 0$ , so enthält  $T(f)$  das ganze Parameterintervall  $0 \leq t \leq \infty$ . V. Paatero (Helsinki).

Shah, S. M.: A note on the derivatives of integral functions. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 1156—1163 (1947).

Beweis der folgenden Sätze: I.  $w = f(z)$  sei von der unteren Ordnung  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda \leq \infty$ , und  $M(r) = \max |f(z)|$ ,  $M^{(j)}(r) = \max |f^{(j)}(z)|$  auf  $|z| = r$ . Dann gilt:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\log(r M^{(1)}(r)/M(r))] \cdot (\log r)^{-1} = \lambda.$$

II. Für jede ganze transzendente Funktion gilt:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M^{(j+1)}(r)/M^{(j)}(r) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r)/r \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r)/r \leq \lim_{r \rightarrow \infty} M^{(j+1)}(r)/M^{(j)}(r),$$

$j = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\nu(r) =$  Zentralindex für  $w = f(z)$ . Verschiedene einfache Anwendungen dieser Ergebnisse. Valirons Verschärfungen zu Wiman's Theorie des Maximalgliedes von Potenzreihen bilden, neben elementaren Betrachtungen, die Grundlage der Beweise. Wittich (Karlsruhe).

Sario, Leo: Über Riemannsche Flächen mit hebbarem Rand. Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I, Nr. 50, 79 S. (1948).

Der Rand einer Riemannschen Fläche  $F$  heißt hebbär, wenn auf  $F$  keine nichtkonstante eindeutige analytische Funktion mit endlichem Dirichletintegral existiert. Zu dieser Flächenklasse gehören z. B. die nullberandeten Flächen, die durch Verschwinden des harmonischen Maßes charakterisiert sind. Da bei gewissen Eindeutigkeitsfragen der konformen Abbildung die nullberandeten Flächen nicht die kritische Grenze darstellen, hat Verf. die Flächen mit hebbarem Rand betrachtet, die die nullberandeten Flächen umfassen. I. Allgemeine Hebbarkeitsbedingungen. Zur Herleitung von Hebbarkeitskriterien wird  $F$  durch eine Folge von Teilgebieten  $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots$  ausgeschöpft, wobei  $F_n - F_{n-1}$  aus endlich vielen  $(k_n)$  Flächenstücken  $E_{n_i}$  von endlichem Geschlecht und stückweise analytischem Rand besteht. Durch konforme Abbildung von  $E_{n_i}$  auf einen mit Radialschlitz versehenen Kreisring vom Radienverhältnis  $\mu_{n_i}$  wird jedem  $E_{n_i}$  der Modul  $\mu_{n_i}$  zugeordnet. Mit  $\mu_n = \min_{i=1}^{k_n} \mu_{n_i}$  gilt das all-



gemeine Hebbarkeitskriterium: (H) Wenn es eine Ausschöpfung von  $F$  gibt, für welche  $\prod_{n=1}^{\infty} \mu_n$  divergiert, dann ist der Rand von  $F$  hebbar. Anwendung auf das Typenproblem einfach zusammenhängender Flächen  $F$ . Durch Einführung einer konformen Metrik auf  $F$  lassen sich aus (H) Sätze von Ahlfors, Laasonen und R. Nevanlinna ableiten. II. Schlichte Gebiete.  $\Gamma$  sei eine abgeschlossene Punktmenge der komplexen Ebene mit zusammenhängendem Komplement  $F$ . Falls  $\Gamma$  ein Kontinuum enthält, ist diese Punktmenge nicht hebbar. Mittels verschiedener Ausschöpfungen von  $F$  ergeben sich aus (H) hinreichende Bedingungen für die Hebbbarkeit von  $\Gamma$ . Eine Diskussion Cantorscher Punktfolgen zeigt, daß es hebbare Cantorsche Punktfolgen von positivem harmonischem Maß gibt. III. Überlagerungsflächen der komplexen Ebene. — An Flächenelementen werden zunächst zugelassen: Schlichte, algebraische und logarithmische Elemente. Für diese Flächen wird der Einfluß der Verzweigkeit auf die Hebbbarkeit des Randes untersucht. Hier folgen aus (H) wieder hinreichende Kriterien, die schon bekannte Sätze über nullberandete Flächen und über einfach zusammenhängende Flächen mit endlich vielen Grundpunkten als Spezialfälle enthalten. Verallgemeinerung auf Flächen, die aus den bisher betrachteten durch Entfernen einer Menge von Flächenpunkten entstehen. IV. Relativ unverzweigte Überlagerungsflächen von Riemannschen Flächen. Von den verschiedenen Ergebnissen dieses Abschnittes sei nur dieses erwähnt: Alle Überlagerungsflächen  $F$  einer geschlossenen Riemannschen Fläche  $F$ , die einer Menge von punktfremden Schnittpaaren bzw. Schnitten zugeordnet sind, besitzen einen hebbaren Rand. — Ist die Grundfläche  $F$  vom Geschlecht  $p > 1$ , so liefert schlichte konforme Abbildung einer Schottkyschen Überlagerungsfläche eine Randpunktmenge von positivem harmonischem Maß (nach Myrberg), also ein Beispiel einer hebbaren Randpunktmenge von positivem harmonischem Maß. — Im letzten Abschnitt werden Eigenschaften von Riemannschen Flächen mit hebbarem Rand betrachtet, wobei folgende Fragen angeschnitten werden: Eindeutigkeit der Uniformisierung, Fortsetzbarkeit von Riemannschen Flächen, Abbildung auf Kreisgebiete. Hierbei zeigt sich besonders deutlich, wie bei Beschränkung auf Flächen mit hebbarem Rand wichtige Beiträge zu noch ungelösten Problemen erzielt werden können. Dadurch wird die Wichtigkeit der zuerst von R. Nevanlinna betrachteten Flächenklasse mit hebbarem Rand noch einmal besonders deutlich unterstrichen. Wittich (Karlsruhe).

Radojčić, M.: Remarque sur le problème des types des surfaces de Riemann. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A 1, 97—100 (1947).

Eine Konstruktion von E. Ullrich, die zur Lösung eines Problems von A. Speiser diente, wird vom Verf. so gedeutet, daß damit eine früher ausgesprochene Vermutung über die Struktur der Menge der „transzendenten Winkelbündel“ widerlegt wird. Dieser Begriff wurde in früheren Arbeiten über die Zerlegung der Existenzgebiete eindeutiger analytischer Funktionen in „Fundamentalgebiete“ eingeführt. Eine frühere Aussage des Verf. wird als hinreichendes Kriterium für das Eintreffen des parabolischen Typus formuliert; es ist aber als solches wenig brauchbar.

Wittich (Karlsruhe).

### Modulfunktionen:

Petersson, Hans: Über die lineare Zerlegung der den ganzen Modulformen von höherer Stufe entsprechenden Dirichletreihen in vollständige Eulersche Produkte. Acta math., Uppsala 80, 191—221 (1948).

Jeder ganzen Modulform  $f(\tau)$  von der Stufe  $N$  und der ganzzahligen Dimension  $-r \leq -1$  werde vermöge der Fourierschen Entwicklung  $f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{2\pi i m \tau / N}$

die Dirichletsche Reihe  $D(s, f) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m^{-s}$  zugeordnet. E. Hecke [Math. Ann., Berlin 114, 1—28, 316—351 (1937); dies. Zbl. 15, 402, 16, 355; Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd. 17, Nr. 12, 1—134 (1940); dies. Zbl. 24, 9] untersuchte die Frage nach der Existenz einer Eulerschen Produktentwicklung von  $D(s, f)$  und allgemeiner nach der additiven Zerlegung von  $D(s, f)$  in Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung, wobei ein entscheidender Schritt erst durch die vom Verf. [Math. Ann., Berlin 116, 401—412 (1939), 117, 39—64, 277—300 (1940); dies. Zbl. 21, 22; 24, 261] eingeführte Bildung des Skalarproduktes von Modulformen ermöglicht wurde. In diesen Untersuchungen hatte es sich herausgestellt, daß die durch Streichung aller Glieder  $a_m m^{-s}$  mit  $(m, N) > 1$  aus  $D(s, f)$  entstehende sog. reduzierte Reihe



ein besonders einfaches Verhalten zeigt, indem sie sich stets eindeutig als lineare Kombination von kanonischen Eulerschen Produkten  $\prod_{p \nmid N} (1 - a_p p^{-s} + \varepsilon(p) p^{r-1-2s})^{-1}$

darstellen läßt. In der vorliegenden Arbeit wird das Problem im allgemeinen Fall zum Abschluß gebracht. Es ergibt sich wieder eine eindeutige lineare Zerlegung von  $D(s, f)$  in Eulersche Produkte; dabei treten aber entsprechend den Primteilern  $q$  von  $N$  noch endlich viele Faktoren der Form  $(1 - a q^{-s})^{-1}$  oder  $q^{-s}$  hinzu. Zum Schluß werden die ganzen Spitzenformen von der Dimension  $-2$  zur Hauptkongruenzgruppe achter Stufe betrachtet. Eine Basis der zugehörigen  $D(s, f)$  besteht aus 5 kanonischen Produkten, die explizit bestimmt werden. Dabei stellt sich heraus, daß stets  $|a_p| < 2\sqrt{p}$  ist, womit in diesen 5 Fällen ein Analogon der sog. Ramanujanschen Vermutung bewiesen ist. Siegel (Princeton, N. J.).

**Petersson, Hans:** Über die Berechnung der Skalarprodukte ganzer Modulformen. *Comment. math. Helvetici* **22**, 168—199 (1949).

Bezeichnungen:  $\tau = x + iy$ ;  $\Gamma$  eine Grenzkreisgruppe erster Art, d. h. eine Gruppe von Abbildungen  $\tau \rightarrow (\alpha\tau + \beta)/(\gamma\tau + \delta)$  ( $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ) der oberen  $\tau$ -Halbebene  $y > 0$  in sich, welche dort einen kanonischen Fundamentalbereich  $\mathfrak{R}$  mit endlichem nicht-euklidischem Inhalt  $\iint_{\mathfrak{R}} \frac{dx dy}{y^2}$  besitzt;  $f$  und  $g$  ganze

automorphe Formen in  $\Gamma$ , von gleicher Dimension  $-r < 0$  und gleichem Multiplikationssystem des Betrages 1, für welche das Produkt  $fg$  an allen parabolischen Spitzen von  $\mathfrak{R}$  verschwindet;  $(f, g) = \iint_{\mathfrak{R}} fg y^{r-2} dx dy$  das Skalarprodukt von  $f$  und  $g$ ; es sei  $\infty$  eine parabolische Spitze von  $\mathfrak{R}$ , so daß  $\Gamma$  eine Substitution  $\tau \rightarrow \tau + N$  mit möglichst kleinem  $N > 0$  enthält, und  $f(\tau + N) = e^{2\pi i k} f(\tau)$ ,  $0 \leq k < 1$ ;  $f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{2\pi i(n+k)\tau/N}$ ,  $g(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{2\pi i(n+k)\tau/N}$ ; (1)  $D(s; f, g) = \sum_{n+k>0} b_n \bar{c}_n (n+k)^{-s}$ ,  $s = \sigma + it$ ;  $\Phi(s, \tau) = \sum_{\gamma, \delta}' |\gamma\tau + \delta|^{-s}$  ( $\sigma > 2$ ), wo über sämtliche verschiedenen in  $\Gamma$  auftretenden Paare  $\gamma, \delta$  summiert wird. Unter Benutzung einer von R. A. Rankin [*Proc. Cambridge philos. Soc.* **35**, 357—372 (1939); dies. Zbl. **21**, 392] verwendeten Umformung wird gezeigt, daß für die in der Halbebene absoluter Konvergenz durch (1) definierte Dirichletsche Reihe  $D(s)$  die Formel

$$(2) \quad N \left( \frac{N}{4\pi} \right)^s \Gamma(s) D(s; f, g) = \iint_{\mathfrak{R}} (f(\tau) \overline{g(\tau)}) \Phi(2s - 2r + 2, \tau) y^{s-1} dx dy$$

besteht, wodurch die analytische Fortsetzung von  $D(s)$  in die Halbebene  $\sigma > r$  hergestellt wird. Weiterhin wird  $\Gamma$  als Kongruenzgruppe von endlichem Index  $\mu$  in der Modulgruppe vorausgesetzt. Aus der explizit bekannten Fourierschen Entwicklung von  $\Phi(s, \tau)$  als Funktion von  $\tau$  ergibt sich die analytische Fortsetzung von  $\Phi(s, \tau)$  in die ganze  $s$ -Ebene und hieraus nach (2) die analytische Fortsetzung von  $D(s)$  in die Halbebene  $\sigma > r - \frac{1}{2}$ . Das Hauptresultat besagt: Setzt man  $\varrho = \frac{12(4\pi)^{r-1}}{\mu N^r \Gamma(r)} (f, g)$ , so ist die Funktion  $D(s) - \varrho/(s-r)$  für  $\sigma > r - \frac{1}{2}$  regulär; damit ist die Berechnung des Skalarproduktes  $(f, g)$  auf die Bestimmung des Residuums der Dirichletschen Reihe  $D(s; f, g)$  bei  $s = r$  zurückgeführt. Als Beispiel werden die Skalarprodukte einiger Thetareihen berechnet. Siegel.

**Dalzell, D. P.:** Convergence of certain series associated with Fuchsian groups. *J. London math. Soc.* **23**, 19—22 (1948).

Es sei gegeben eine im Innern des Einheitskreises  $|z| \leq 1$  diskontinuierliche Gruppe von Abbildungen  $z \rightarrow (a_n z + b_n)/(\bar{b}_n z + \bar{a}_n)$  ( $|a_n|^2 - |b_n|^2 = 1$ ;  $n = 0, 1, \dots$ ), welche auch noch auf einem Bogen des Einheitskreises selber diskontinuierlich ist;

dann ist bekanntlich  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^{-2}$  konvergent. Unter der einschränkenden Annahme, daß die Gruppe nur hyperbolische Abbildungen enthält und einen von endlich vielen Kreisbögen begrenzten Fundamentalbereich besitzt, beweist Verf. die Konvergenz von  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^{-2} (\log |a_n|)^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ); dabei werden Eigenschaften des Integrales  $\iint_{|z|<1} \sum_{n=0}^{\infty} |\bar{b}_n z + a_n|^{-2} (\log 1/(1-|z|^2))^k dx dy$  benutzt. Siegel (Princeton, N. J.).

### Gewöhnliche Differentialgleichungen:

Wintner, Aurel: On the classical existence theorem of linear differential equations. Amer. J. Math. 71, 331—338 (1949).

Sia  $\alpha(t) = \|\alpha_{i,k}(t)\|$  ( $i, k = 1, \dots, n$ ) una matrice quadrata di ordine  $n$ , i cui elementi siano funzioni della variabile reale  $t$  in  $(1, \infty)$ , e ivi a variazione limitata, e per  $0 \leq s < \infty$  risultino convergenti gli integrali

$$a_{i,k}(s) = \int_1^{\infty} e^{-st} d\alpha_{i,k}(t), \quad [a_{i,k}] = \int_1^{\infty} |d\alpha_{i,k}(t)|.$$

L'A. dimostra che alla matrice  $\alpha(t)$  può associarsi un'altra matrice  $\beta(t) = \|\beta_{i,k}(t)\|$  ( $i, k = 1, \dots, n$ ), i cui elementi  $\beta_{i,k}(t)$  sono funzioni della variabile  $t$ , a variazione limitata in  $(1, \infty)$ , per le quali risultino convergenti gli integrali

$$b_{i,k} = \int_1^{\infty} e^{-st} d\beta_{i,k}(t), \quad [b_{i,k}] = \int_1^{\infty} |d\beta_{i,k}(t)|,$$

e tali che, posto  $A(s) = \|a_{i,k}(s)\|$ ,  $B(s) = \|b_{i,k}(s)\|$  l'equazione lineare  $dx(s)/ds = A(s)x(s)$  nel vettore  $x(s) = (x_1(s), \dots, x_n(s))$  ammette un sistema fondamentale di vettori integrali  $x^{(1)}(s), \dots, x^{(n)}(s)$  la cui matrice

$$X(s) = \begin{vmatrix} x_1^{(1)}(s), & \dots, & x_1^{(n)}(s) \\ \dots & & \dots \\ x_n^{(1)}(s), & \dots, & x_n^{(n)}(s) \end{vmatrix}$$

soddisfa la relazione (1)  $X(s) = E - B(s)$ , essendo  $E$  la matrice unità [ $E = \|\varepsilon_{i,k}\|$ ;  $\varepsilon_{i,i} = 1$ ,  $\varepsilon_{i,k} = 0$  per  $i \neq k$ ]. La (1) equivale all'equazione

$$B'(s) = A(s) + A(s)B(s)$$

che l'A. risolve col classico procedimento delle approssimazioni successive. — Il teorema è esteso a matrici  $A(s)$  i cui elementi hanno la forma

$\int_p^{\infty} e^{-it\lambda} d\alpha_{i,k}(\lambda)$ ,  $0 < p \leq \lambda < \infty$ ,  $-\infty < t < \infty$ , e applicato alle serie di Dirichlet assolutamente convergenti. Giovanni Sansone (Firenze).

Levinson, N.: On the uniqueness of the potential in a Schrödinger equation for a given asymptotic phase. Danske Vid. Selsk. math.-fysiske Medd. 25, Nr. 9, 29 S. (1949).

Verf. zeigt: Zu der Lösung  $y(x, \lambda)$  des Anfangswertproblems  $y'' + (\lambda^2 - P(x))y = 0$ ,  $y(0, \lambda) = 0$ ,  $y'(0, \lambda) = 1$  ( $\lambda = u + iv$ ) lassen sich im Falle  $\lambda = u \neq 0$  zwei stetige Funktionen  $\Phi(u)$ ,  $A(u)$  finden, so daß die Beziehung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ y(x, u) - \frac{A(u)}{u} \sin(ux - \Phi(u)) \right] = 0$$

gilt, falls 1.  $P(x)$  im Lebesgueschen Sinne meßbar; 2.  $P(x) \geq 0$  und 3.  $\int_0^{\infty} xP(x) dx < \infty$  ist. Es gibt ferner keine andere Funktion  $Q(x)$ , die 1., 2., 3. genügt und auf dieselbe Funktion  $\Phi(u)$  führt; überdies bestimmt  $\Phi(u)$   $A(u)$  um-



kehrbar eindeutig. Das Entsprechende gilt, falls statt 1., 2., 3. die Bedingungen

$$4. \int_0^1 x |P(x)| dx + \int_1^\infty x^2 |P(x)| dx < \infty \text{ und } 5. \Phi(\infty) - \Phi(+0) < \pi \text{ erfüllt sind.}$$

Die Betrachtungen lassen sich auf die Gleichung  $y'' + (u^2 - l(l+1)/x^2 - P(x)) y = 0$  übertragen ( $l > 0$ , ganz). Maruhn (Dresden).

### Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Fichera, Gaetano: Applicazione della teoria del potenziale di superficie ad alcuni problemi di analisi funzionale lineare. Giorn. Mat. Battaglini 78, 71—80 (1948).

$D$  sei ein Bereich des dreidimensionalen Raumes, der als äußeren Rand die Fläche  $\Sigma_0$  (der Klasse 2) und als innere Ränder  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_p$  (von der Klasse 2) hat. Es bezeichnen  $O_s$  ( $s = 1, 2, \dots, p$ ) einen Punkt des von  $\Sigma_s$  berandeten Gebiets und  $\varrho_s, \vartheta_s, \varphi_s$  Polarkoordinaten eines allgemeinen Punktes  $P$  bezüglich eines Bezugssystems mit dem Pol in  $O_s$ , ferner  $Y_{mi}(\vartheta_s, \varphi_s)$  ( $i = 1, 2, \dots, 2m+1$ ) ein Fundamentalsystem von Kugelfunktionen der Ordnung  $m$ . Dann setzt Verf.

$$\omega_{mi}(P) = \varrho_s^m Y_{mi}(\vartheta_s, \varphi_s), \quad \tau_{mi}^{(s)}(P) = \frac{Y_{mi}(\vartheta_s, \varphi_s)}{\varrho_s^{m+1}}.$$

Ordnet man in eine Folge  $\{v_k(P)\}$  die unendlich vielen Funktionen  $\omega_{mi}$  und  $\tau_{mi}^{(s)}$  die man erhält, wenn man den Indizes  $s, m, i$  die Werte  $s = 1, 2, \dots, p; m = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, 2m+1$  erteilt, so beweist Verf., daß jede auf dem Rande  $FD$  stetige Funktion gleichmäßig auf  $FD$  durch eine Linearkombination der Funktionen  $\{v_k(P)\}$  approximiert werden kann. Ferner, daß jede auf  $FD$  stetige Funktion, die der Bedingung  $\iint_{FD} f d\sigma = 0$  genügt, gleichmäßig auf  $FD$  durch eine Linear-

kombination der Funktionen  $\{dv_k/dn\}$  approximiert werden kann. Daraus folgt, daß jede in  $D$  harmonische, bireguläre Funktion  $u(z)$  gleichmäßig in  $D$  durch eine Linearkombination der Funktionen  $\{v_k\}$  approximiert werden kann, derart, daß auf  $FD$  die  $d/dn$  gegen  $du/dn$  streben. C. Miranda (Neapel).

Walsh, J. L., W. E. Sewell and H. M. Elliott: On the degree of convergence of harmonic polynomials to harmonic functions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 35, 59—62 (1949).

Zusammenstellung von Sätzen (ohne Beweis), die sich auf die Konvergenz von harmonischen Polynomen auf der Ebene gegen harmonische Funktionen beziehen, so daß die Güte der Annäherung von der Ordnung des Polynoms und von Lipschitzbedingungen für die Funktion, bzw. deren Ableitungen auf dem Rand des Gebiets abhängt. H. Hornich (Graz).

Reade, Maxwell O.: On functions having subharmonic logarithms. Bull. Amer. math. Soc. 53, 89—95 (1947).

Reade, Maxwell O.: A particular generalized Laplacian. Bull. Amer. math. Soc. 53, 96—97 (1947).

Besitzt  $f(x, y)$  einen subharmonischen Logarithmus, so läßt sich die zu diesem gehörige Massendichte als Grenzwert eines Ausdruckes darstellen, welcher die Differenz des Quadrates des  $f$ -Mittelwertes auf einem Kreise und des  $f^2$ -Mittelwertes im Kreise enthält. Ein derartiger Grenzwert kann als verallgemeinerter Laplaceoperator aufgefaßt werden, derart wie analoge Grenzwerte zu den Verallgemeinerungen von Blaschke und Privaloff geführt haben. G. af Hällström (Åbo).

Potts, D. H.: A note on the operators of Blaschke and Privaloff. Bull. Amer. math. Soc. 54, 782—787 (1948).

Frühere Resultate über die im Titel genannten verallgemeinerten Laplaceoperatoren werden erweitert. Es wird gezeigt, daß die Existenz des Blaschkeoperatorwertes die Existenz desjenigen von Privaloff nach sich zieht.

G. af Hällström (Åbo).

## Variationsrechnung:

Morse, Marsten and William Transue: Integral representations of bilinear functionals. Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 136—143 (1949).

In questa nota viene dato prima un riassunto di risultati pubblicati in altri lavori dagli stessi A. A. (v. bibliografia nel testo) e ispirati all'importanza che le forme bilineari hanno nel Calcolo delle Variazioni per lo studio della variazione seconda. Così, tenendo presente le esigenze del Calcolo delle Variazioni e della teoria delle equazioni integrali non lineari, si generalizza la rappresentazione del Fréchet dei funzionali bilineari di due funzioni continue

$$\Phi(x, y) = F(x, y, k) = \int_0^1 x(s) d_s \int_0^1 y(t) d_t k(s, t) = \int_0^1 y(s) d_s \int_0^1 x(t) d_t k(t, s)$$

al caso di spazi funzionali  $A, B$  più generali. Si introduce pertanto una nozione di variazione  $h(A, B, k)$  (di una funzione di due variabili) relativa ai due spazi funzionali  $A, B$ ; la funzione di distribuzione  $k(s, t)$  che entra nella suddetta formula risulta allora a variazione limitata, univocamente determinata dal funzionale  $\Phi$  e la sua variazione è data da

$$h(A, B, k) = \sup_{x, y} \frac{|\Phi(x, y)|}{|x|_A |y|_B} \quad \{ |x|_A > 0, |y|_B > 0 \}.$$

Si considera poi l'espressione bilineare in  $u, v$

$$S(u, v; p, q, r) = F(u, v, p) + F(u, \dot{v}, q) + F(v, \dot{u}, q) + F(\dot{u}, \dot{v}, r)$$

che comprende come caso molto particolare la variazione seconda classica del Calcolo delle Variazioni, e per cui si dà una riduzione a forma canonica la quale permette di ottenere una condizione necessaria e sufficiente per il suo annullarsi.

F. Pellegrino (Roma).

Wilkins jr., J. Ernest: The isoperimetric problem of Bolza with finite side conditions. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 1151—1155 (1947).

Si considera una classe di problemi variazionali che possono essere ricondotti a problemi isoperimetrici di Bolza e si danno condizioni necessarie e condizioni sufficienti affinché un arco  $C: a_h, y_i(x)$  ( $h = 1, \dots, r, i = 1, \dots, n, x_1 \leq x \leq x_2$ ) renda minima l'espressione

$$I(C) = g(a) + \int_{x_1}^{x_2} f(a, x, y, y') dx$$

nella classe degli archi tali che  $x_s = x_s(a), y_i(x_s) = y_{is}(a)$  ( $s = 1, 2$ ),

$$\Phi_\sigma(a, x, y, y') = 0 \quad (\sigma = q + 1, \dots, q + m \leq n),$$

$$g_\varrho(a) + \int_{x_1}^{x_2} f_\varrho(a, x, y, y') dx = 0 \quad (\varrho = q + 1, \dots, q + p)$$

e che inoltre soddisfano alle condizioni  $\Psi_\mu(a, x, y) = 0$  ( $\mu = 1, \dots, q$ ). — L'A. suppone che le funzioni che compaiono nelle precedenti formule siano continue assieme alle loro derivate parziali dei primi tre ordini in un campo  $R$  di punti

$(a, x, y, y')$ , che sia  $x_1(a) < x_2(a)$ , e che la matrice  $\begin{vmatrix} \Phi_\sigma y_i \\ \Psi_\mu y_i \end{vmatrix}$  abbia caratteristica

$m + q$  in  $R$ . Nel lavoro in esame viene data una trattazione più semplice del problema in questione, il quale, sotto condizioni un po' diverse, era già stato considerato da J. W. Bower [Contr. Calculus Variations, Chicago 1933—37, 1—51, questo Zbl. **18**, 28].

S. Cingolini (Pavia).

Stampacchia, Guido: Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali del tipo iperbolico. Giorn. Mat. Battaglini **78**, 81—96 (1948).

L'A. applica il metodo diretto del Tonelli per stabilire teoremi di esistenza



del minimo per l'integrale

$$I[u] = \iint_D f(x, y, u(x, y), u'(x, y)) dx dy,$$

ove si suppone che  $f(x, y, u, w)$  sia una funzione finita e continua con la derivata parziale  $f_w$  per ogni  $(x, y)$  di un campo aperto e limitato  $D$  e per ogni valore finito di  $u$  e  $w$ , e si considera la classe delle funzioni  $u(x, y)$  doppiamente assolutamente continue in  $D$  (cioè assolutamente continue secondo Vitali) e per le quali esiste finito l'integrale  $I[u]$ ,  $u'(x, y)$  essendo la derivata totale regolare di  $u(x, y)$ . — L'A. considera domini  $D^*$  così definiti: Sia  $y = \alpha(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) un arco di curva con  $\alpha(x)$  continua e crescente e sia  $T_1$  l'insieme dei punti  $(x, y)$  per i quali è

$$x \leq b; \quad \begin{cases} y \geq \alpha(x), & \text{per } a \leq x \leq b, \\ y \geq \alpha(a), & \text{per } x < a; \end{cases}$$

sia  $x = \beta(y)$  ( $c \leq y \leq d$ ) un arco di curva appartenente al dominio  $T_1$ , con  $\beta(y)$  continua e crescente e sia  $T_2$  l'insieme dei punti  $(x, y)$  per i quali è

$$y \leq d; \quad \begin{cases} x \geq \beta(y), & \text{per } c \leq y \leq d, \\ x \geq \beta(c), & \text{per } y < c; \end{cases}$$

allora  $D^*$  è il dominio costituito dai punti  $(x, y)$  che appartengono sia a  $T_1$  che a  $T_2$ . Inoltre chiamati vertici del dominio  $D^*$  il punto di coordinate minime e quello di coordinate massime, un vertice  $P$  è di seconda specie se non esiste alcun segmento uscente da  $P$ , parallelo a uno degli assi coordinati e tutto costituito di punti della frontiera di  $D^*$ . — Ciò premesso e tenuto presente che i concetti di integrale quasi-regolare seminormale e di classe completa di funzioni sono del tutto analoghi a quelli ben noti della teoria del Tonelli, l'A. stabilisce due teoremi esistenziali tra cui il seguente: — Sia  $I[u]$  un integrale quasi regolare positivo seminormale, ed esistano tre numeri  $\alpha > 0$ ,  $\mu > 0$  ed  $N$  in modo che in ogni punto  $(x, y)$  di  $D^*$  e per tutti i valori finiti di  $u$  e  $w$  sia verificata la disuguaglianza

$$f(x, y, u, w) > \mu |w|^{1+\alpha} + N.$$

Se  $K$  è una classe completa di funzioni  $u(x, y)$  doppiamente assolutamente continue in  $D^*$ , ugualmente continue e ugualmente limitate sulla frontiera di  $D^*$  ed equiassolutamente continue nell'intorno di ogni eventuale vertice di seconda specie, allora nella classe  $K$  esiste il minimo assoluto di  $I[u]$ . — Tra le applicazioni alle equazioni differenziali figura il seguente teorema: Siano  $\alpha(x, y)$ ,  $b(x, y)$  due funzioni doppiamente assolutamente continue in  $D^*$ , con  $\alpha(x, y) \geq m > 0$ , e sia  $f(x, y, u)$  una funzione definita e continua per ogni  $(x, y)$  di  $D^*$  e per ogni valore finito di  $u$ , e si supponga che esistano due costanti non negative  $h_1, h_2$  tali che sia

$$\int_0^u f(x, y, t) dt \geq -h_1 u^2 - h_2.$$

Allora l'equazione differenziale

$$[\alpha(x, y) u' + b(x, y) u]' + [b(x, y) u' + f(x, y, u)] = 0$$

ammette nel campo  $D^*$  almeno una soluzione nulla sulla frontiera di  $D^*$ , se, indicato con  $k$  il più piccolo degli autovalori dell'equazione

$$[\alpha(x, y) u' + \lambda b(x, y) u]' + \lambda [b(x, y) u' - h_1 u] = 0$$

con la condizione che  $u(x, y)$  sia nulla sulla frontiera di  $D^*$ , è verificata la disuguaglianza  $k > 2$ .

S. Cinquini (Pavia).

### Integralgleichungen. Integraltransformationen:

• Hamel, Georg: Integralgleichungen. 2. berichtigt. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1949. VIII, 166 S. mit 19 Abb. brosch. 15,60 DM.

**Barankin, Edward W.:** Bounds on characteristic values. Bull. Amer. math. Soc. 54, 728—735 (1948).

Es sei  $(a_{\mu\nu})$  eine unendliche Matrix, für welche  $\sum \sum |a_{\mu\nu}|^p$  für ein  $p \leq 1$  konvergiert. Man setze  $R_\nu^{(p)} = \sum |a_{\nu\kappa}|^p$ ,  $T_\nu^{(p)} = \sum |a_{\mu\nu}|^p$ . Dann genügt jeder Eigenwert  $\lambda$  von  $(a_{\mu\nu})$ , zu welchem eine beschränkte Eigenlösung gehört, den drei Abschätzungen

$$|\lambda| \leq \max_\nu R_\nu^{(1)}, \quad \max_\nu T_\nu^{(1)}, \quad \max \{R_\nu^{(q)} T_\nu^{(2-q)}\}^{\frac{1}{2}},$$

wobei in der letzten die Zahl  $q$  beliebig aus dem Intervall  $p \leq q \leq 2-p$  gewählt werden darf, also z. B. insbesondere  $q = 1$ . Entsprechende Abschätzungen gelten für Integralgleichungen unter geeigneten Summierbarkeitsbedingungen für den Kern.

Wielandt (Mainz).

**Germa, R.-H.-J.:** Sur une méthode d'approximations successives pour l'intégration des systèmes d'équations intégrales de seconde espèce de Volterra. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 26—30 (1948).

Verf. konstruiert für das Integralgleichungssystem

$$\varphi_j(x) = f_j(x) + \lambda \int_a^x \{K_{j1}(x, s) \varphi_1(s) + K_{j2}(x, s) \varphi_2(s) + K_{j3}(x, s) \varphi_3(s)\} ds \quad (j = 1, 2, 3)$$

nach dem Vorbilde der Behandlungsweise für eine einzige Volterrasche Integralgleichung gewisse, zu den iterierten Kernen analoge Funktionen, mit deren Hilfe er sukzessive die Systeme von Näherungslösungen herstellt. Diese konvergieren, wie nicht näher ausgeführt wird, gegen das Lösungssystem. Maruhn (Dresden).

**Fantappiè, Luigi:** I funzionali derivati del determinante e del nucleo risolvente di un nucleo dato. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 5, 329—333 (1948).

In einer anderen Arbeit (vgl. die Bibliographie im Text) hat Verf. gezeigt, daß eine beliebige Funktionale Gleichung im analytischen Feld auf die „kanonische“ Form

$$(1) \quad y(z) = f(z) + \lambda k(z, \dot{t}) y(\dot{t}) - f(z) + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_C k\left(z, \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t} y(t) dt$$

gebracht werden kann. Verf. hat auch gezeigt, daß auf die Gleichung (1), die das Aussehen einer Integralgleichung zweiter Art hat, die Fredholmischen Methoden übertragen werden können. So ist auch in diesem Falle der lösende Kern  $R(\lambda; z, t)$  der Quotient zweier ganzer Transzendenten  $D(\lambda; z, t)$  und  $D(\lambda)$ , die nicht-lineare analytische Funktionale des gegebenen Kerns  $k(z, t)$  sind. Wenn  $R$  bekannt ist, ist die Lösung von (1) durch den Ausdruck

$$y(z) = f(z) + \lambda R(\lambda; z, \dot{t}) f(\dot{t})$$

gegeben. Um den Kern  $R$  mittels einer Reihenentwicklung zu bestimmen, ist es wichtig, die abgeleiteten Funktionale, in der Definition des Verf. [Accad. Ital. Mem. Cl. Sci. fisic. mat. natur. 2, Nr. 4 (1931); dies. Zbl. 3, 264], zu kennen. Diese sind (in endlicher und expliziter Form) in dieser Arbeit berechnet, und zugleich die der ganzen Transzendenten, von denen oben die Rede war, und des sogenannten „assozierten Kerns“  $\Gamma(\lambda; z, t) = 1/(1 - \lambda t) + \lambda R(\lambda; z, t)$ . Die Kenntnis dieser abgeleiteten Funktionale erlaubt dem Verf., die Variationen von  $D(\lambda)$ ,  $R$  und  $\Gamma$  zu berechnen; sie werden mittels eben dieser Funktionale ausgedrückt. So hat man z. B.

$$\delta \Gamma(\lambda; z, t) = \lambda \Gamma(\lambda; z, \dot{\alpha}) \delta k(\dot{\alpha}, \dot{\beta}) \Gamma(\lambda; \dot{\beta}, t).$$

F. Pellegrino (Rom).



Šerman, D. I.: On the Dirichlet and Neuman problems in the theory of steady oscillations. Priklad. Mat. Mech., Moskva 11, 259—266 (1948) [Russisch].

In der vorliegenden Arbeit wird der allgemeine Fall der stationären Schwingungen eines mehrfach zusammenhängenden, durch die Kurven  $L_j$  begrenzten Bereichs  $S$  untersucht, indem das Problem auf eine Fredholmsche Integralgleichung von der Form

$$(1) \quad v(s_0) + \int_L v(s) K(s, s_0, \lambda) ds = f(s)$$

zurückgeführt wird, wo die Dichte  $v(s)$  eine noch unbekannte Funktion bezeichnet und der Kern

$$K(s, s_0, \lambda) = \frac{dN(\lambda r_0)}{dn} + \sum_{j=1}^m v_j N(r_{0j});$$

wo ferner:

$$N(\lambda r) = N_0(\lambda r) - \frac{1}{\pi} \left( C + \log \frac{\pi}{2} \right) J_0(\lambda r),$$

$$N_0(\lambda r) = \frac{1}{\pi} \left( \log \frac{\lambda r}{2} + C \right) J_0(\lambda r) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left( \frac{\lambda r}{2} \right)^{2k} \sum_{m=1}^k \frac{1}{m},$$

$J_0(\lambda r)$  die Besselsche Funktion erster Art und nullter Ordnung,  $C$  die Eulersche Konstante, während  $N_0(\lambda r)$  sich von der üblichen Neumannschen Zylinderfunktion lediglich durch einen Faktor  $\frac{1}{2}$  unterscheidet. Ferner ist  $\varepsilon_j = 1$ , wenn der Punkt  $t = \xi + i\eta$  auf der Kurve  $L_j$ , und  $\varepsilon_j = 0$ , wenn dieser Punkt auf einer der übrigen Kurven  $L_k$  ( $k \neq j$ ) liegt. Endlich bezeichnen  $\lambda$  einen reellen Eigenwert,  $f(s)$  eine vorgegebene stetige Funktion des Bogens  $s$  und  $n$  die Normale zum Bereich  $S$ , von außen nach innen positiv gerechnet. Die obige Form der Gleichung (1) erlaubt es, die Existenz der Lösung festzustellen. Gran Olsson (Trondheim).

Krishnan, K. S.: On the equivalence of certain infinite series and the corresponding integrals. J. Indian math. Soc., II. s. 12, 79—88 (1948).

Die Gleichung  $\alpha \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha + \theta)}{(n\alpha + \theta)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \quad (0 < \alpha \leq \pi)$  ist aus

einer speziellen Fourierschen Reihe leicht zu gewinnen. Kürzlich (vgl. Bhatia-Krishnan, dies. Zbl. 30, 95) hat N. Wiener gezeigt, daß diese Gleichung sehr einfach aus der Fourierschen Transformation von  $\sin^2 x/x^2$  über die Poissonsche Summenformel gewonnen werden kann. Der Beweis von Wiener gibt Verf. Veranlassung, den folgenden Satz in den Vordergrund zu stellen: „Wenn die gerade Funktion  $f(x)$  eine Fouriersche Transformierte  $g(v)$  besitzt, die für  $|v| < a$  nirgends, für  $|v| \geq a$  überall verschwindet, so ist für jedes  $\alpha$  aus  $0 < \alpha \leq 2\pi/a$  und jedes  $\theta$

die Gleichung  $\alpha \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\alpha + \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  erfüllt“. Dieser Satz wird angewendet auf eine Anzahl von Funktionen, die samt ihren Fourierschen Transformaten in Arbeiten von Ramanujan [Quart. J. Math. 48, 294 (1920)] und Campbell-Foster [Bell Telephone System, Techn. Publ., Monograph B—584 (1931)] enthalten sind. R. Schmidt (München).

### Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Dunford, Nelson and Einar Hille: The differentiability and uniqueness of continuous solutions of addition formulas. Bull. Amer. math. Soc. 53, 799—805 (1947).

Es wird die Funktionalgleichung

$$(1) \quad f(\xi + \zeta) = G[f(\xi), f(\zeta)] \quad (0 \leq \xi, \zeta < \omega; 0 \leq \xi + \zeta \leq \omega)$$

betrachtet. Es ist hier  $G[\alpha, \beta]$  eine komplexe, symmetrische Funktion, welche in  $\alpha$  und  $\beta$  analytisch ist im Bereich  $A$ , begrenzt durch eine Jordan-Kurve, welche

endliche Bogenlänge besitzt. Als Lösung wird eine Funktion  $f(\xi)$  betrachtet ( $0 \leq \xi < \omega$ ), deren Werte einer kommutativen komplexen Banach-Algebra angehören (eine  $B$ -wertige Funktion) und welche der Gleichung (1) genügt. Das Hauptresultat: I. Ist  $f(\xi)$  eine stetige  $B$ -wertige Lösung von (1), dann hat  $f(\xi)$  Ableitungen allen Ranges und  $f'(\xi) = G_1[f(0), f(\xi)] \cdot f'(0)$  ( $G_1[\alpha, \beta] = (\partial/\partial\alpha)G[\alpha, \beta]$ ). II. Ist  $g(\xi)$  eine andere stetige Lösung von (1) und  $g(0) = f(0)$ ,  $g'(0) = f'(0)$ , dann ist  $f(\xi) \equiv g(\xi)$ . III. Ist  $\Phi(\xi)$  eine nichtkonstante analytische Lösung der Gleichung (1), so ist die einzige stetige  $B$ -wertige Lösung von (1), für welche  $f(0) = \Phi(0) \cdot e$  gilt:  $f(\xi) = \Phi[f'(0) \cdot \xi]$  in einem Intervalle  $0 \leq \xi \leq \varrho$ .  $e$  bedeutet das Einheitsselement der betrachteten Banachalgebra.

St. Fenyö (Budapest).

James, R. C., A. D. Michal and Max Wyman: Topological abelian groups with ordered norms. Bull. Amer. math. Soc. 53, 770—774 (1947).

Etant donné un groupe abélien  $S$  ordonné et filtrant, et un groupe abélien  $T$  tel que pour tout  $x \in T$  et tout entier  $n_0$ , il existe  $y \in T$  et  $n > n_0$  tels que  $x = ny$ , les auteurs disent qu'une application  $x \mapsto \|x\|$  de  $T$  dans  $S$  est une norme si: 1°  $\|x\| \geq 0$  et la relation  $\|x\| = 0$  entraîne  $x = 0$ ; 2°  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ; 3°  $\|nx\| = |n| \cdot \|x\|$  pour tout entier  $n$ . La donnée d'une telle „norme“ permet de définir sur  $T$  une topologie séparée compatible avec la structure de groupe. Les A. montrent que lorsque  $S$  est archimédien (au sens que lorsque  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  dans  $S$ , il existe un entier  $n$  tel que  $\alpha < n\beta$ ), le groupe topologique  $T$  peut être plongé dans un espace normé. Ils donnent enfin une définition de la différentielle d'une application de  $T$  dans un groupe „normé“ analogue  $T'$ , et montrent comment cette notion se ramène à la définition de Fréchet lorsque  $S$  est archimédien.

J. Dieudonné (Nancy).

Gottschalk, W. H.: Recursive properties of transformation groups. II. Bull. Amer. math. Soc. 54, 381—383 (1948).

Généralisation d'un résultat obtenu dans un travail précédent [W. H. Gottschalk et G. A. Hedlund, Bull. Amer. math. Soc. 52, 637—641 (1946)], où les aut. s'occupent de propriétés d'un groupe topologique  $T$  de transformations d'un espace topologique qui se transmettent à certains sous-groupes de  $T$ ; ils montrent que c'est le cas pour une propriété qui englobe entre autres celle de presque périodicité.

A. Borel (Zürich).

Pellegrino, Franco: Su alcune proprietà fondamentali delle regioni funzionali non lineari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 5, 333—339 (1948).

Verf. beschäftigt sich mit den Funktionalbereichen, in denen die analytischen Funktionale von Fantappiè definiert sind, und beweist, indem er nur von den Grundlagen der Theorie dieses Autors Gebrauch macht, einige Eigenschaften bezüglich der Mengen  $A$ , mit denen die Umgebungen  $(A, \sigma)$  ein und derselben Funktion oder mehrerer Funktionen, die zu ein und demselben Funktionalbereich gehören, wo ein analytisches Funktional definiert ist, gebildet werden. Das bemerkenswerteste Ergebnis ist der folgende Satz: Wenn  $F[y(t)]$  ein lokal nicht konstantes analytisches Funktional ist und wenn man irgendeine Funktion  $y_0(t)$  seines Definitionsbereiches  $R$  nimmt, so hat die Menge  $A$ , mit der irgendeine ihrer zu  $R$  gehörenden Umgebungen  $(A, \sigma)$  gebildet wird, Punkte gemeinsam mit allen anderen abgeschlossenen Mengen, mit denen alle zu  $R$  gehörenden Umgebungen dieses  $y_0$  und aller anderen Funktionen von  $R$  gebildet werden. N. Cignani.

Kuratowski, Casimir: Sur la topologie des espaces fonctionnels. Ann. Soc. Polonaise Math. 20, 314—322 (1948).

Partant de deux espaces  $L^*$  (au sens de Fréchet et de P.A.),  $X$  et  $Y$ , l'A. définit l'espace  $C(X, Y)$  des applications continues de  $X$  dans  $Y$  comme un espace  $L^*$ , en définissant une suite  $(f_n)$  comme convergente vers  $f$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$



pour toute suite  $(x_n)$  qui converge vers  $x$  dans  $E$ . Lorsque  $X$  et  $Y$  sont des espaces métriques, cette définition correspond à la topologie de la convergence uniforme sur toute partie compacte de  $X$ . L'A. montre comment, pour cette définition, se généralisent les propriétés classiques de la topologie de la convergence uniforme dans un espace métrique compact. J. Dieudonné (Nancy).

**Mickle, Earl J.:** On the extension of a transformation. Bull. Amer. math. Soc. 55, 160—164 (1949).

In Verallgemeinerung eines Satzes von Kirszbraun [Fundam. Math., Warszawa 22, 77—108 (1934); dies. Zbl. 9, 39; vgl. auch Valentine, Bull. Amer. math. Soc. 49, 100—108 (1943)] und mit einer anderen Methode wird bewiesen: Vor.: (1) Es sei  $\mathfrak{R}$  ein metrischer separabler Raum und  $P' P''$  die Entfernung zweier Punkte  $P', P''$  von  $\mathfrak{R}$ . — (2) Es sei  $g(t)$  eine eindeutige, reelle, stetige Funktion der reellen Veränderlichen  $t$  mit  $0 \leq t < +\infty$  und mit folgenden Eigenschaften:  $g(0) = 0$ ;  $0 < g(t)$  für  $0 < t$ ; ist  $P_v \in \mathfrak{R}$ ,  $v = 0, 1, \dots, n$ , für jedes  $n \geq 1$ ; so ist die reelle quadratische Form  $\sum_{i,j}^{1\dots n} [(g(P_0 P_i))^2 + (g(P_0 P_j))^2 - (g(P_i P_j))^2] x_i x_j$  positiv definit. — (3) Es sei  $Z = f(P)|\mathfrak{M}$  mit  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$  eine (eindeutige) Abbildung von  $\mathfrak{M}$  in den euklidischen  $E_k$  mit folgender Eigenschaft: Für beliebige  $P', P'' \in \mathfrak{M}$  gilt  $Q' Q'' \leq g(P' P'')$ , wenn  $Q' = f(P')$ ,  $Q'' = f(P'')$ . — Beh. Es kann  $f(P)|\mathfrak{M}$  erweitert werden zu einer Abbildung  $F(T)|\mathfrak{R}$ , welche (für  $\mathfrak{R}$  statt für  $\mathfrak{M}$ ) der Vor. (3) genügt und Erweiterung von  $f(P)|\mathfrak{M}$  ist, d. h. für welche  $f(P)|\mathfrak{M} = F(P)|\mathfrak{M}$ . — Der Satz gilt auch, wenn der  $E_k$  ersetzt wird durch einen unitären vollständigen Raum und wenn  $\mathfrak{R}$  nicht separabel ist. Haupt (Erlangen).

**Munroe, M. E.:** Homomorphisms on Banach spaces. Bull. Amer. math. Soc. 54, 776—781 (1948).

Es sei  $E$  ein Banachraum,  $E^*$  sein konjugierter. Zu jedem linearen Teilraum  $G$  von  $E$  wird der Orthogonalraum  $\Gamma$  in  $E^*$  gebildet, dann ist bekanntlich  $G^*$  im Sinne der Normtopologie isomorph zum Quotientenraum  $E^*/\Gamma$ . Verf. untersucht, welche Eigenschaften der natürliche Homomorphismus von  $E^*$  auf  $G^* = E^*/\Gamma$  hat. Er zieht die verschiedenen schwachen und beschränkt schwachen Topologien heran und untersucht, wann  $T$  in bezug auf diese Topologien offen bzw. abgeschlossen ist. Die Ergebnisse sind nicht alle neu, so ist z. B. Theorem 3.3 Spezialfall eines Satzes von J. Dieudonné [Ann. Sci. Ecole norm. sup., III. s. 59, 107—139 (1942), speziell Th. 7; dies. Zbl. 27, 321]. G. Köthe (Mainz).

**Cameron, R. H. and C. Hatfield jr.:** On the summability of certain orthogonal developments of nonlinear functionals. Bull. Amer. math. Soc. 55, 130—145 (1949).

Si considerano i funzionali di Fourier-Hermite [Cameron e Martin, questo Zbl. 29, 143], i quali costituiscono un insieme di funzionali chiusi ortonormali appartenenti allo spazio dei funzionali che sono misurabili secondo Wiener e a quadrato sommabili secondo Wiener. Nel presente lavoro viene stabilito che, per un funzionale limitato misurabile secondo Wiener, la serie di Fourier-Hermite, relativa allo speciale insieme di funzioni  $\alpha_n(t) = \sqrt{2} \cos \frac{1}{2} (2n-1) \pi t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ), è sommabile con le medie di Abel a infinite dimensioni in ogni punto in cui il funzionale è continuo nella topologia di Hilbert. S. Cingolini (Pavia).

**Barsotti, I.:** A proof of two fundamental theorems on linear transformations in Hilbert space, without use of the axiom of choice. Bull. Amer. math. Soc. 53, 943—949 (1947).

Es werden das Auswahlaxiom nicht benützende Beweise für zwei Sätze aus der Theorie des Hilbertschen Raumes gegeben: 1. Gilt  $M_1 \subset M_2$  für zwei linear abgeschlossene Mannigfaltigkeiten, so spannt das orthogonale Komplement  $M_2 - M_1$

mit  $M_1$  zusammen ganz  $M_2$  auf. 2. Ein symmetrischer, überall definierter Operator ist beschränkt.

G. Köthe (Mainz).

Neumark, M. A.: Extremal spectral functions of a symmetric operator. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **11**, 327—344 u. engl. Zusammenfassg. 344 (1947) [Russisch].

Ist  $H$  ein symmetrischer Operator in  $\mathfrak{H}$ , so bilden die Operatoren  $B(\lambda)$  eine Spektralfunktion von  $H$ , wenn für jedes reelle  $\lambda$   $B(\lambda)$  ein beschränkter positiver Operator ist,  $(B(\lambda)f, f)$  mit wachsendem  $\lambda$  nicht abnimmt,  $B(\lambda)f$  für jedes  $f$  im Sinne der Norm linksstetig ist, ferner  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} B(\lambda)f = 0$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} B(\lambda)f = f$  gilt und schließlich für jedes endliche Intervall  $\Delta = (\alpha, \beta)$  stets  $B(\Delta)f = B(\beta)f - B(\alpha)f$  dem Definitionsbereich von  $H^*$  angehört und  $H^*B(\Delta)f = \int_{\Delta} \lambda dB(\lambda)f$  gilt.

Selbstadjungierte  $H$  haben nur eine Spektralfunktion, deren  $B(\lambda)$  orthogonal, d. h. Projektionsoperatoren sind, nicht selbstadjungierte  $H$  haben nichtorthogonale Spektralfunktionen. Sie ergeben sich aus den Spektralfunktionen der selbstadjungierten Fortsetzungen  $H'$  von  $H$  in Hilbertschen Räumen  $\mathfrak{H}' \supset \mathfrak{H}$  durch Projektion auf  $\mathfrak{H}$ . Die Spektralfunktionen eines  $H$  bilden eine konvexe Menge  $[\varphi_1 B_1(\lambda) + \varphi_2 B_2(\lambda), \varphi_1 + \varphi_2 = 1, \varphi_1 \geq 0, \varphi_2 \geq 0, \text{ ist wieder eine}]$ , also gibt es extremale Spektralfunktionen. Entsteht  $B(\lambda)$  aus der minimalen selbstadjungierten Erweiterung  $H'$  von  $H$ , so ist  $B(\lambda)$  dann und nur dann nichtextremal, wenn ein beschränkter, positiver, mit  $H$  vertauschbarer Operator  $A$  in  $\mathfrak{H}'$  existiert, der in  $\mathfrak{H}$  irreduzibel ist und für den  $(Af, g) = (f, g)$  für alle  $f, g \in \mathfrak{H}$  gilt. Ist  $\mathfrak{H}'$  eine endlichdimensionale Erweiterung von  $\mathfrak{H}$ , so definiert  $H'$  stets eine extremale Spektralfunktion von  $H$ . — Das Momentenproblem in  $(-\infty, \infty)$  verlangt die Be-

stimmung einer nichtabnehmenden Funktion  $\sigma(\mu)$ , so daß  $S_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^n d\sigma(\mu)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  gilt für eine gegebene Folge reeller  $S_0 = 1, S_1, S_2, \dots$ . Die Positivität der  $\sum_{p+q=n} S_{p+q} x_p \bar{x}_q$  für alle  $n = 0, 1, 2, \dots$  ist notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit. Die Gesamtheit der Polynome  $P(\mu) = \sum_0^n c_k \mu^k$  erzeugt bezüglich des skalaren Produktes  $(P, Q) = (S(P\bar{Q}), S(P) = \sum_0^n c_k S_k)$  einen Hilbertschen Raum  $\mathfrak{H}$ . Der durch  $HP(\mu) = \mu P(\mu)$  erklärte Operator in  $\mathfrak{H}$  ist selbstadjungiert oder symmetrisch vom Defekt  $(1, 1)$ . Ist  $B(\lambda)$  eine Spektralfunktion von  $H$ , so ist  $\sigma(\mu) = (B(\mu)1, 1)$  eine Lösung des Momentenproblems, und so ergeben sich alle. Extremalen  $B(\lambda)$  entsprechen extremale  $\sigma(\mu)$ .  $L_\sigma$  sei der Raum aller  $f(\mu)$  mit  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\mu)| d\sigma(\mu) < \infty$  und  $\|f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\mu)| d\sigma(\mu)$ . Die Lösung  $\sigma(\mu)$  des Momentenproblems ist dann und nur dann extremal, wenn die Gesamtheit der Polynome  $P(\mu)$  in  $L_\sigma$  im Sinne der Norm dicht ist.

G. Köthe (Mainz).

### Praktische Analysis:

• Ortman, Karl: Mathematische Formeln und Regeln. Donauwörth: Verlag Cassianeum 1949. 304 S., 50 Abb., 2 Tafeln, Halbleinen DM 12.—.

Greville, T. N. E.: Actuarial note: Adjusted average graduation formulas of maximum smoothness. Record, Amer. Inst. Actuaries **36**, 249—264 (1947).

Gegenstand der Arbeit sind Glättungsformeln der Gestalt

$$u_x = a_0 u'_{x-p} + \dots + a_p u'_x + \dots + a_{p+q} u'_{x+q},$$

wobei  $u'_x$  die ursprünglichen Werte,  $u_x$  die geglätteten Werte an äquidistanten Stellen  $x$  sind. Unter der Voraussetzung, daß die Formel bis zu  $r$ -ten Differenzen genau ist (d. h., daß  $u_x = u'_x$  ist, falls für die  $u$  die Werte eines Polynoms von



$r$ -tem oder niedrigerem Grad eingesetzt werden), werden die Koeffizienten  $a_i$  so bestimmt, daß  $\sum_{i=-m}^{p+q} (\Delta^m a_i)^2$  ( $a_i = 0$  für  $i < 0$  und  $i > p + q$ ) ein Minimum ist.

Verf. referiert die bekannte Lösung dieser Aufgabe im Fall  $m = 0$  mittels Tschebyscheffscher Orthogonalpolynome und behandelt mit gleichen Hilfsmitteln den Fall eines allgemeinen  $m$ . Zahlenbeispiele werden für  $r = 3$  und  $m = 4$  gegeben.

Günther Schulz (Aachen).

Morgantini, Edmondo: Sulle equazioni in sei variabili rappresentabili con un nomogramma a punti allineati. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 17, 115—138 (1948).

Für eine Funktion in sechs Variablen, die durch eine Gleichung  $F(t_1, \dots, t_6) = 0$  gegeben ist, will der Verf. ein Nomogramm herstellen. Zu diesem Zwecke werden in drei aufeinander liegenden Ebenen je zwei Kurvenscharen  $\Sigma_i$  und  $\Sigma_k$  gezeichnet (wobei die  $i, k$  die Wertepaare 1, 2 und 3, 4 und 5, 6 annehmen). Diese 2 Kurvenscharen legen also für die 2 Variablen  $t_i, t_k$  einen Punkt fest. Die gegebene Gleichung soll dann erfüllt sein, wenn diese 3 Punkte auf einer Geraden liegen. Das Ziel dieser Arbeit ist, Bedingungsgleichungen dafür anzugeben, daß die angegebene geometrische Darstellung möglich ist.

Rudolf Ludwig (Braunschweig).

Pol, Balth. van der: An electromechanical investigation of the Riemann zeta function in the critical strip. Bull. Amer. math. Soc. 53, 976—981 (1947).

Zur Untersuchung des Verlaufes der  $\zeta$ -Funktion auf der Geraden  $z = \frac{1}{2} + it$ , insbesondere ihrer Nullstellen, geht Verf. von der Gleichung

$$\frac{\zeta(\frac{1}{2} + it)}{\frac{1}{2} + it} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{e^{-x/2} [e^x] - e^{x/2}\} e^{-ixt} dx$$

aus. Statt den Gesamtverlauf der sägeförmigen Kurve der geschweiften Klammer zu nehmen, nimmt er nur das Stück von  $-9$  bis  $+9$  und wiederholt dieses periodisch. Diese Funktion wird mittels rotierender Scheibe und Photozelle in einen elektrischen Strom umgesetzt, dem ein sinusförmiger Strom überlagert wird, dessen Frequenz von 0 bis 15000 Schwingungen so langsam anwächst, daß man einen quasistationären Zustand hat. Durch verschiedene weitere eingeschaltete elektrische und mechanische Vorrichtungen erhält man schließlich eine Aufzeichnung, die im wesentlichen den absoluten Betrag der rechten Seite obiger Gleichung wiedergibt. Die ersten 29 Nullstellen (bis auf die 9., 14. und 15.) werden hier durch tiefe Minima im Gebiete  $0 \leq t \leq 100$  angedeutet. Sie stimmen mit den im Jahneke-Emde angegebenen bis auf etwa 1% überein. Bis  $t = 210$  ergeben sich im ganzen 73 Minima, die man wahrscheinlich als Nullstellen interpretieren muß. Willers.

Steinbruch, K.: Ein Verfahren zur Lösung eindimensionaler Ausgleichsvorgänge. Ingenieur-Arch. 17, 233—242 (1949).

Die Wärmeleitungsgleichung wird für drei gleichzeitig zu erfüllende Randbedingungen nach einem auf der physikalischen Anschauung beruhenden Spiegelungsverfahren, dessen Einzelschritte, Funktionen und Koeffizienten in Tabellen angegeben werden, durch eine sehr gut konvergierende Reihe gelöst.

Pretsch.

Hattree, D. R.: Recent development in calculating machines. J. sci. Instrum. London 24, 172—176 (1947).

• Murray, F. J.: The theory of mathematical machines. New York: Columbia University Press 1947. VIII, 116 p. \$ 3,00.

Laurent, Mariette: Table de la fonction elliptique de Dixon pour l'intervalle 0—0,1030. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. s. 35, 439—450 (1949).

• Comrie, L. J.: Chambers's six-figure mathematical tables. Vol. 1: Logarithmic values. Vol. 2: Natural values. Edinburgh and London: W. and R. Chambers, Ltd., 1948—1949. XXII, 576 p.; XXXVI, 576 p., 42 s. net each.

Palamà, G.: Calcolo di 808 cifre decimali esatte di  $\pi$ . Archimede, Firenze 1, 86—87 (1949).

# Klassische theoretische Physik.

## Mechanik:

● Sygne, John L. and B. A. Griffith: Principles of mechanics. 2. ed. New York and London: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1949. 530 p. 30 s.

Lampariello, Giovanni: Sur la dynamique du point matériel de masse variable. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 35—37 (1948).

Dans certaines hypothèses simplificatrices du mouvement rectiligne d'une fusée (considérée comme point matériel de masse variable), l'A. réduit le problème à l'intégration, par la méthode d'itération de Picard, de l'équation

$$(E) \quad \frac{d}{d\tau} \left( \tau \frac{dx}{d\tau} \right) = v - \frac{K\tau}{x^2},$$

où  $x(\tau_0) = x_0 = R$ , rayon de la Terre,  $(dx/d\tau)_0 = 0$ ,  $v = \text{const.}$ ,  $\tau = \tau_0 - t$ ,  $K$  le produit de la constante de gravitation  $f$  par la masse  $M$  de la Terre. — L'A. aboutit à l'expression explicite de la vitesse  $V$  (toujours positive pour  $0 < t < \tau_0$ ) et de la première approximation  $x_1(t)$ , constamment croissante pour des valeurs de  $t$  suffisamment petites.

Mangeron (Jassy).

Kravtchenko, Julien: Sur les équations générales de la dynamique des systèmes. Ann. Univ. Grenoble, II. s. **22**, 281—297 (1947).

Wieder einmal eine Arbeit, die so tut, als sei außer von Appell nie etwas über Mechanik, insbesondere über nichtholonome Systeme geschrieben worden! Die elegante Methode Appells leidet darunter, daß die Berechnung seiner Beschleunigungsfunktion unverhältnismäßig große und überflüssige Arbeit verursacht. Daher leitet Verf. direkt aus dem Lagrangeschen Prinzip unter der Annahme, daß die Bedingungsgleichungen  $dq_{n+j} = \alpha_{ji} dq_i + \alpha_j dt$  lauten, die Bewegungsgleichungen ab:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \left( \frac{\partial x_{jk}}{\partial q_i} q'_k + \frac{\partial x_j}{\partial q_i} - \frac{dx_{ji}}{dt} \right) \frac{\partial T}{\partial q'_{n+j}} - \alpha_{ji} \frac{\partial T}{\partial q_{n+j}} = Q_i,$$

wo der Strich über dem Zeichen  $T$  der kinetischen Energie andeutet, daß die Bedingungsgleichungen benutzt werden. Es ist ein Sonderfall bekannter Gleichungen.

Hamel (Landshut/Bayern).

Mittleman, Don: The unions of trajectory series of lineal elements generated by the plane motion of a rigid body. Trans. Amer. math. Soc. **64**, 498—518 (1948).

Geht man mit einem ebenen starren Körper, der sich in einem ebenen Kraftfeld befindet, so zur Grenze der Kleinheit über, daß die Trägheitshauptachsen und das Verhältnis der beiden Hauptträgheitsmomente erhalten bleiben, so bestehen für dieses Elementarpartikel (element-particle) erstens die bekannten Gleichungen der Punktmechanik, außerdem aber eine Gleichung für die Drehbewegung, in der u. a. das Grenzverhältnis der Hauptträgheitsmomente zum polaren Trägheitsmoment vorkommt. Geht man in der benutzten Potenzentwicklung ein Glied weiter und vernachlässigt das Verhältnis der Trägheitsmomente zur Masse nicht, wohl aber höhere Glieder — Verf. nennt dann den Körper mikroskopisch —, so bleibt die Momentengleichung ungeändert, während die Kraftgleichung Zusatzglieder bekommt. Ist das gegebene Kraftfeld ein Potentialfeld, so haben auch Kraft und Moment beim mikroskopischen Körper ein Potential. Nachdem die Zeit eliminiert ist, wird nach sogenannten „unions“ gefragt, d. h. nach solchen Bewegungen, bei denen dauernd eine Hauptachse die Bahntangente berührt. Weder beim Elementarpartikel noch beim mikroskopischen Körper gibt es ein Kraftfeld, für das  $\infty^3$  „unions“ existieren. Wohl können  $\infty^2$  vorkommen, und das wird genau erörtert. Die Bahnkurven bilden einen Sonderfall der von E. Kasner eingehend studierten Kurven.

Hamel (Landshut).



**Stange, K.:** Über die Bewegung eines stabilen schweren symmetrischen Kreisels bei kleinen Störungen des Längsschwunges. *Ingenieur-Arch.* **16**, 343—356 (1948).

In Weiterführung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **31**, 83) wird ein Kreisel von der im Titel angedeuteten Beschaffenheit betrachtet, dessen Figurenachse durch einen kleinen Querschwing gestört wird. Auch dieser Vorgang hängt nur von einem einzigen dimensionslosen Parameter, der „Stabilitätszahl“ des Kreisels, ab. Der Ablauf der Bewegung wird durch Darstellung der Bewegung der Kreiselachse und der Schwungachse untersucht. Es ergeben sich zwei Frequenzen, eine schnelle, deren Frequenz gleich der Summe aus der Präzessions- und Nutationsfrequenz ist, und eine langsame; die Projektionsbewegung auf die Horizontalebene läßt eine besonders anschauliche Deutung zu. *Th. Pöschl (Karlsruhe).*

**Kellner, L.:** Bending vibrations of a linear chain. *Proc. physic. Soc. London, Sect. A* **62**, 200—202 (1949).

Es werden die Transversalschwingungen einer linearen, aus gleichen Massenpunkten bestehenden Kette untersucht, indem die Biegesteifigkeit der Kette proportional der zweiten Differenz der Transversalverschiebung der Massenpunkte und damit die rücktreibende Kraft in der Bewegungsgleichung proportional ihrer vierten Differenz gesetzt wird. Damit ergibt sich eine offenkundige Analogie zur Schwingungsgleichung für die Biegeschwingungen von Platten und Stäben. Für den Fall freier Enden werden die Lösungen des Systems von homogenen linearen Differenzengleichungen in üblicher Weise angegeben und diskutiert. *F. Sauter.*

**Crandall, Stephen H.:** On restoring forces which admit forcing terms of non-critical amplitude. *Bull. Amer. math. Soc.* **53**, 633—636 (1947).

Während bei linearen Schwingern die Amplitude der erzwungenen Schwingung bei Ausschluß der Resonanz ein konstantes Vielfaches der Amplitude der erregenden Funktion ist, führt bei Schwingern mit nichtlinearer Rückstellkraft  $g(x)$  eine Änderung der Amplitude der Erregerfunktion  $f(t)$  i. a. nicht nur eine Änderung der Amplitude, sondern auch eine Änderung des Verlaufes der erzwungenen Schwingung herbei. Allerdings gibt es eine Gruppe nichtlinearer Rückstellkräfte mit der Eigentümlichkeit, daß infolge einer Änderung der Amplitude der Erregerfunktion die erzwungenen Schwingungen wohl ihre Amplitude, nicht aber den Charakter ihres zeitlichen Verlaufes ändern. — Verf. stellt sich nun die Aufgabe, für die genannte Gruppe den allgemeinen Charakter der Rückstellkräfte, sowie hierzu die für die Existenz und Gewinnung der zugehörigen Erregerfunktionen hinreichenden Bedingungen anzugeben. — Für die Rückstellkräfte  $g(x)$  der oben erwähnten Gruppe beweist er im Theorem I ihre allgemeine Darstellbarkeit durch die beiden Formen  $g(x) = ax + bx^\alpha$  bzw.  $g(x) = ax + bx \log x$ , wo  $a, b, \alpha$  Konstanten und  $x$  die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage bedeuten. Mit diesen Lösungen ist dann im Theorem II die zugehörige Erregerfunktion  $f(t)$  als Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung angebar, sofern eine gewisse Integralgleichung einer bestimmten Bedingung unterworfen wird. — Als Beispiel behandelt Verf. das Duffingsche Schwingungsproblem mit  $g(x) = x + bx^3$  und gibt die zur Lösung  $x$  (mittels elliptischer Funktionen) gehörige Erregerfunktion an. *Karas.*

**Cartwright, Mary L.:** Non-linear vibrations. *Advanc. Sci., Brit. Assoc. Advanc. Sci.* **6**, 64—75 (1949).

Überblick über den derzeitigen Stand, vorwiegend der amerikanischen und russischen Forschung auf dem Gebiete der periodischen und fast-periodischen Bewegungsvorgänge, soweit sie mit gewissen Typen nicht-linearer Differentialgleichungen in Zusammenhang stehen, wie sie bei einigen mechanischen und elektrischen Problemen, insbesondere in der Radiotechnik, auftreten. Kritik der verschiedenen Verfahren: Elementare Verfahren mit reellen Variablen liefern meist nur allgemeine Aussagen. Überlegen ist schrittweise Integration, besonders bei Verwendung automatischer Integrationsmaschinen, z. B. amerikanischer mit Elektronenröhren. Sonst ist vielfach sukzessive Approximation möglich, wenn entweder die nicht-linearen Terme klein sind gegenüber den linearen, oder umgekehrt. Im ersten Falle stellt sich meist ein Ver-

fahren der Iteration oder Potenzentwicklung heraus, das in der Regel im praktischen Bereich konvergiert. Im zweiten Falle kann es vorkommen, daß innerhalb eines Teiles der Periode andere nicht-lineare Terme gegenüber den linearen überwiegen, als während des anderen Teiles; für die dann erforderliche diskontinuierliche Behandlung wurde von russischer Seite eine Theorie entwickelt. Rein theoretisch steht ferner die Existenz periodischer Lösungen mit der Existenz fester Punkte bei gewissen Transformationen in Zusammenhang, wobei sich topologische Gesichtspunkte — auch für fastperiodische Lösungen nicht-linearer Differentialgleichungen — ergeben. Es wird ferner auf die Schwierigkeiten hingewiesen, die sich der genauen physikalischen Bestimmung der Größen entgegenstellen, die bei der Formulierung der Differentialgleichung von ausschlaggebender Bedeutung sind. Verf. weist darauf hin, daß es uninteressant ist, die mathematische Behandlung weiter zu treiben, als es der Genauigkeit des experimentellen Befundes entspricht. Schließlich wird auf besondere Einzelergebnisse hingewiesen, welche für die gewohnte, nur mit den Gesetzmäßigkeiten der linear-harmonischen Schwingungen vertraute Denkweise des Physikers und Ingenieurs besonders verblüffend sind, wie z. B. das Auftreten subharmonischer Schwingungen. Am Schlusse des Aufsatzes ist eine umfangreiche Literaturzusammenstellung beigelegt.

H. Neuber (Dresden).

• **Saenger, Raymund: Ballistische Störungstheorie (unter besonderer Berücksichtigung der Witterungseinflüsse).** Basel: Birkhäuser, 1949. 240 Seiten mit 20 Abbildungen. Ganzleinen Fr. 14,50.

### Elastizität. Plastizität:

• **Isaacs, Rufus: Planar elasticity as a potential theory.** Rev. Univ. nac. Tucumán, A 6, 263—272 (1948).

Verf. entwirft eine ebene Elastizitätstheorie unter wesentlicher Heranziehung der Theorie polygener (nicht-monogener) Funktionen, wie sie von E. Kasner entwickelt worden ist. Als Grundbegriff führt er das elastische Potential als polygene

Funktion  $\Phi(z) = \int_a^z w dz$  ein, dessen (im polygenen Sinne genommene) Ableitung  $w = \Phi'$  in einem bestimmten Punkt  $z$  und in einer bestimmten Richtung  $\Theta$  den komplexen Ausdruck  $w = w(z, \Theta) = \sigma + i\tau$  darstellt, worin  $\sigma$  die Normalspannung und  $\tau$  die Schubspannung in  $z$  bezüglich  $\Theta$  bezeichnet. Hierbei wird  $w$  stetig differenzierbar angenommen, und  $a$  bedeutet irgendeinen festen Punkt des als zweidimensionaler Körper betrachteten Gebietes der  $z$ -Ebene. Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt zunächst der Existenzsatz: zu jeder Spannungsverteilung  $w$  in einem einfach zusammenhängenden Körper gibt es eine polygene Funktion, eben das elastische Potential  $\Phi$ , so daß (1)  $w = \Phi'$  und (2)  $\Im(\Phi_z) = 0$  gilt, und umgekehrt liefert die Ableitung jeder Funktion, die (2) befriedigt, eine Spannungsverteilung, welche alle Teile des Körpers im Gleichgewicht läßt. Über die materielle Beschaffenheit des Körpers macht Verf. folgende Linearitätsvoraussetzungen: 1. die Verformung  $W(z)$  sei proportional zu  $\Phi$ ; 2. die potentielle Energie je Flächeneinheit lasse sich als positiv definite quadratische Form in  $\Phi_z$  und  $\Phi_{\bar{z}}$  und ihren konjugierten darstellen; 3. der Körper sei homogen und isotrop; 4. die partiellen Ableitungen von  $W$  und  $\Phi$  (und ihre konjugierten) hängen linear voneinander ab (Hookessches Gesetz). Eine Materie, die diese 4 Bedingungen erfüllt, nennt Verf. linear. Für eine lineare Materie genügt das elastische Potential dem Differentialgleichungssystem  $\Im(\Phi_z) = 0$ ,  $\Phi_{zzz} = 0$  und ist von der Gestalt  $\Phi = g(z) + zg'(\bar{z}) + f(\bar{z})$ , wobei  $f$  und  $g$  monogene Funktionen bedeuten. Endlich wird noch ein Eindeigkeitsatz bewiesen und kurz auf die Beziehung zu den monogenen Potentialen eingegangen.

V. Garten (Tübingen).

• **McEwen, Ewen: Stresses in elastic cylinders in contact along a generatrix (including the effect of tangential friction).** Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, VII. s. 40, 454—459 (1949).

Zwei unendlich lange, elastische Zylinder mögen sich entlang einer Erzeugenden berühren und mit dem Druck  $F$  gegeneinander gepreßt werden. Die Berührungsspannungen sind gesucht. Das Problem wird üblicherweise als Sonderfall des all-



gemeinen Hertzschen Problems behandelt, bei dem nach den Berührungsspannungen zweier beliebig geformter Körper im Bereich der (als klein gegenüber den Körperdimensionen anzunehmenden) Berührungszone gefragt ist. — Verf. gibt die Lösung auf direktem Weg, jedoch gegenüber der herkömmlichen insofern allgemeiner, als er auch die tangentiale Reibung mitberücksichtigt. Ausgehend von der auch bisher gemachten Voraussetzung, die Kontaktfläche sei ein so schmaler Streifen entlang einer Erzeugenden, daß die beiden Zylinder als unendlich ausgedehnte Halbräume angenommen werden dürfen und daß der Berührungsstreifen als eben gelten kann, findet er für die Spannungskomponenten folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= + \frac{4F\sigma}{\pi b^2} [m - z + \mu(y - n)], \\ p_{yy} &= - \frac{2F}{\pi b^2} \left[ m - 2z + 2\mu(y - n) + m \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} + \mu n \frac{z^2 - m^2}{m^2 + n^2} \right], \\ p_{zz} &= - \frac{2F}{\pi b^2} \left[ m - m \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} - \mu n \frac{z^2 - n^2}{m^2 + n^2} \right], \\ p_{yz} &= - \frac{2F}{\pi b^2} \left[ \mu(m - 2z) - n \frac{z^2 - m^2}{m^2 + n^2} + \mu m \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right]. \end{aligned}$$

Hier bedeutet:  $2b$  = Breite des Kontaktstreifens,

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{\frac{1}{2}[(b^2 - y^2 + z^2) + \sqrt{(b^2 - y^2 + z^2)^2 + 4y^2 z^2}]}, \\ n &= \sqrt{\frac{1}{2}[-(b^2 - y^2 + z^2) + \sqrt{(b^2 - y^2 + z^2)^2 + 4y^2 z^2}]}, \end{aligned}$$

$x$ -Achse = Berührungslinie = Erzeugende,  $y$ -Achse tangential dazu,  
 $z$ -Achse normal dazu,  $\mu$  = Reibungskoeffizient,  $\sigma$  = Poissonsche Konstante.  
 Hardtwig (München).

**Zerna, W.:** Zur Membrantheorie der allgemeinen Rotationsschalen. Ingenieur-Arch. 17, 223—232 (1949).

Die vorliegende Untersuchung, die einen Auszug aus einer von der T. H. Hannover genehmigten Dissertation darstellt, setzt sich zum Ziel, den Membranspannungszustand beliebig geformter und belasteter Rotationsschalen zu berechnen. Die Meridiankurve wird durch die Parameterdarstellung  $y = y(\vartheta)$ ,  $z = z(\vartheta)$  beschrieben.  $N_\varphi$ ,  $N_\theta$  bedeuten die Längskräfte in Richtung der Breitenkreistangente und der Meridiantangente,  $T$  Schubkräfte,  $p_\varphi$ ,  $p_\theta$ ,  $p_r$  die Komponenten der äußeren Belastung in Richtung der Breitenkreistangente, der Meridiantangente und der Schalennormalen, überstrichene Größen die entsprechenden reduzierten Längskräfte bzw. Lastkomponenten. Die drei Gleichgewichtsbedingungen der Membrantheorie am Schalenelement in Richtung des Breitenkreises, des Meridians und der Schalennormalen lassen sich auf eine einzige zurückführen und die Schubkräfte  $T$  und Längskräfte  $N_\varphi$  lassen sich eliminieren. Die Ermittlung des Membranspannungszustandes wird so auf die Integration der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 N_\theta}{\partial \vartheta^2} - f_1(\vartheta) \frac{\partial^2 N_\theta}{\partial \eta^2} + f_2(\vartheta) \frac{\partial N_\theta}{\partial \vartheta} + f_3(\vartheta) N_\theta = \bar{q}$$

zurückgeführt, wobei

$$\bar{q} = \frac{\partial^2 \bar{p}_r}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \bar{p}_\varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{p}_\theta}{\partial \vartheta} - \frac{2z'}{z} \bar{p}_\theta,$$

$$f_1(\vartheta) = (z''/z) - (y''z')/(y'z), \quad f_2(\vartheta) = (y''/y') + (2z'/z),$$

$$f_3(\vartheta) = (y'''/y') + (2y''z')/(y'z) - (y''/y')^2.$$

Sie ist vom hyperbolischen, elliptischen oder parabolischen Typ, je nachdem  $f_1(\vartheta) \gtrless 0$  ist, oder, weil sich für das Gaußsche Krümmungsmaß  $K$  der Schalenfläche die Be-

ziehung  $K = -f_1(\vartheta) y'/(y'^2 + z'^2)^2$  ergibt, werden den verschiedenen Typen Schalen mit negativem, positivem oder verschwindendem Krümmungsmaß zugeordnet. — Die reduzierten Lastkomponenten werden in Fourierreihen nach dem Drehwinkel  $\varphi$  entwickelt:  $\bar{p}_\varphi = \sum_0^\infty a_{\varphi n} \sin n\varphi + b_{\varphi n} \cos n\varphi$ , und entsprechend für  $p_\vartheta$  und  $\bar{p}_r$ . Wegen der Linearität der Differentialgleichung genügt es, die Lastfälle

$$A) \quad \bar{p}_\varphi = a_{\varphi n} \sin n\varphi, \quad \bar{p}_\vartheta = a_{\vartheta n} \cos n\varphi, \quad \bar{p}_r = a_{rn} \cos n\varphi$$

$$B) \quad \bar{p}_\varphi = b_{\varphi n} \cos n\varphi, \quad \bar{p}_\vartheta = b_{\vartheta n} \sin n\varphi, \quad \bar{p}_r = b_{rn} \sin n\varphi,$$

zu betrachten. Die grundlegende Differentialgleichung erscheint dann nach geeigneten Umformungen in der Gestalt

$$(1) \quad \Phi_n'' + F_n(\vartheta) \Phi_n = q_n,$$

wobei  $F_n(\vartheta)$  nur von der Meridiankurve abhängt und die Störungsfunktion  $q_n$  dem Lastfall A oder B entsprechend variiert. Zur Ermittlung der Schnittkräfte hat man (1) zu integrieren, was nur bei besonders einfachen Schalenformen zu geschlossenen Ausdrücken führt. In den allgemeineren, gerade für die Anwendungen wichtigen Fällen ist man auf numerische Lösungsverfahren angewiesen, wozu einige Hinweise gegeben werden. Schließlich wird ein spezielles Beispiel durchgerechnet für eine Schale, deren Meridian zwischen zwei aussteifenden Binderscheiben gespannt und durch den Ausdruck  $z = R + b \sin(\pi y/a)$  ( $0 \leq y \leq a$ ) gegeben ist (bei konstanter Last je Flächeneinheit der Horizontalprojektion der Schalenmittelfläche).

V. Garten (Tübingen).

**Zerna, W.:** Beitrag zur allgemeinen Schalenbiegetheorie. Ingenieur-Arch. 17, 149—164 (1949).

Verf. entwickelt die Grundlagen der allgemeinen Schalentheorie mit Hilfe des Apparates des modernen Vektor- und Tensorkalküls. Die Schale wird als dreidimensionale Mannigfaltigkeit auf ein beliebiges Netz von Parameterlinien ( $\vartheta_1, \vartheta_2$ ) auf der Mittelfläche und die Flächennormalen der Mittelfläche ( $\vartheta_3$ ) bezogen. Auch Spannungszustand und Formänderungszustand werden in diesem System dargestellt, wobei die Schale als so dünn angenommen wird, daß Größen von höherer als erster Ordnung in  $\vartheta_3$  zu vernachlässigen sind. Der Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und den Verschiebungen wird in allgemeiner Form angegeben. Als Anwendung werden die Gleichgewichtsbedingungen und das Elastizitätsgesetz der allgemeinen Rotationsschale aufgestellt. Der entwickelte Formelapparat gestattet im Rahmen der vom Verf. gemachten Voraussetzungen die Benutzung eines jeden beliebigen schiefwinkligen oder rechtwinkligen Koordinatensystems auf der Mittelfläche.

Reutter (Karlsruhe).

**Belluzzi, Odone:** Lo studio delle strutture costituite da lastre curve. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 97—105 (1948).

In una nota precedente [Mem. Acad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fisic., X. s. 3, 37 (1945/46)] l'A. ha ricavato semplici espressioni (approssimate, ma sufficienti nell'ingegneria) per i coefficienti elastici del bordo di una lastra curva di rivoluzione, cioè lo spostamento in senso radiale e la rotazione nel piano meridiano di una particella del bordo, caricato quest'ultimo, uniformemente con forze o con coppie radiali, rispettivamente di intensità e momento unitario, per unità di lunghezza del bordo stesso. Mediante questi coefficienti e trattando per il calcolo degli sforzi e delle deformazioni provocate da carichi esterni le lastre come membrane l'A. ottiene, nella presente nota, varie proprietà per quelle lastre e per i sistemi di più lastre solidali fra loro con o senza anelli lungo il contorno comune. Presenta particolare interesse il calcolo delle reazioni e della freccia di una cupola, comunque vincolata e soggetta a forze simmetriche e l'estensione alle lastre curve del concetto di rigidità.

Graffi (Bologna).



Eckart, Carl: The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. s. 73, 373—382 (1948).

Sei das Quadrat der Länge des Linienelementes im augenblicklichen Zustand  $(dl)^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j$ , wo die  $\delta_{ij}$  die Kroneckerschen Symbole sind, im entspannten Zustande  $(d\lambda)^2 = g_{ij} dx_i dx_j$ , so wird, und das ist das Neue der Theorie,

$$\frac{D(d\lambda)^2}{Dt} = \left\{ \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + g_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + g_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\} dx_i dx_j = 2 a_{ij} dx_i dx_j$$

nicht als Null angenommen, sondern offen gelassen, um einer unelastischen Physik Möglichkeit zu geben. Außer dem Impulssatz werden dann noch der erste und zweite Hauptsatz der Thermodynamik herangezogen. Es gibt dann natürlich noch eine große Menge von Möglichkeiten, von denen die einfachste weiter diskutiert wird. Bei Isotropie gibt es noch acht Konstante, darunter vier dissipative. In obiger Formel sind die  $u_i$  die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors. *Hamel.*

● Zener, Clarence: Elasticity and unelasticity of metals. Chicago: University of Chicago Press; London: Cambridge University Press, 1948. X, 170 p. 4 \$.

Prager, William: The general variational principle of the theory of structural stability. *Quart. appl. Math.* 4, 378—384 (1947).

Verf. behandelt — teilweise im Anschluß an eine Arbeit von Biezeno und Hencky [*Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 31, 569—592 (1928)] — das allgemeine Stabilitätsproblem im (linearen) elastischen und im plastischen Gebiet. Es gibt zwei etwas verschiedene Formulierungen des Problems. Nach der ersten betrachtet man einen deformierten Körper, welcher, zunächst frei von Spannungen, einem System von Belastungen allmählich wachsender Intensität unterworfen wird. Bei genügend kleiner Belastung ergibt sich ein stabiles Gleichgewicht, gesucht wird die Größe der Belastung, bei der es zuerst instabil wird. Nach der zweiten Formulierung betrachtet man eine gegebene Konfiguration und ein Gleichgewichtssystem von räumlichen und Oberflächenkräften und fragt, ob unter deren Einwirkung die Konfiguration stabil ist oder nicht. In der vorliegenden Arbeit wird die zweite Fragestellung gewählt; die Aufgabe wird zunächst auf ein Eigenwertproblem zurückgeführt und schließlich ein diesem Eigenwertproblem äquivalentes Variationsprinzip angegeben; der plastische Bereich unterscheidet sich nur durch andere Werte für die auftretenden Koeffizienten.

*Reutter* (Karlsruhe).

Greenberg, H. J.: Complementary minimum principles for an elastic-plastic material. *Quart. appl. Math.* 7, 85—95 (1949).

In Analogie zum Castiglianoschen Prinzip und dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie bei elastischen Formänderungen werden zwei Minimalprinzipie abgeleitet für einen isotropen Körper im elastisch-plastischen Bereich, der dem Formänderungsgesetz von Prandtl-Reuss gehorcht, verfestigungslos fließt und sich auch im elastischen Gebiet inkompressibel verhält. Das Formänderungsgesetz wird dabei als Beziehung zwischen den zeitlichen Ableitungen der Verzerrungsdeviators ( $\dot{\epsilon}_{ik}$ ) und des Spannungsdeviators ( $\dot{s}_{ik}$ ) geschrieben; der Spannungstensor ist mit ( $\sigma_{ik}$ ) bezeichnet. Ein gemischtes Randwertproblem sei vorgelegt für einen Körper  $V$  mit der Oberfläche  $S$ ; zu einem festen Zeitpunkt sind die Spannungen an jeder Stelle von  $V$  gegeben, auf einem Teil  $S_1$  von  $S$  in jedem Punkt die zeitlichen Ableitungen  $\dot{T}_i$  der Komponenten des Spannungsvektors, auf einem Teil  $S_2$  von  $S$  in jedem Punkt die Komponenten  $u_i$  des Geschwindigkeitsvektors. Die Fließbedingung ist gegeben durch  $J_2 = k^2$ , wo  $J_2$  die zweite Invariante des Spannungsdeviators ist, und im plastischen Bereich sei ihre zeitliche Ableitung nirgends positiv. Ein System von Spannungsableitungen ( $\dot{\sigma}_{ik}$ ) heißt ein Lösung des Randwertproblems, wenn 1. ( $\dot{\sigma}_{ik}$ ) die Gleichgewichtsbedingung, 2. die Randbedingung auf  $S_1$  erfüllt, 3. im plastischen Bereich, wo  $J_2 = k^2$  ist, stets  $\dot{J}_2 \leq 0$  ist; 4. ein System von Dehnungsgeschwindigkeiten ( $\dot{\epsilon}_{ik}$ ) existiert, daß den Verträglichkeitsbedingungen,

der Inkompressibilität und der Randbedingung auf  $S_2$  genügt und welches zusammen mit dem  $(\dot{s}_{ik})$  bzw.  $(s_{ik})$  dem gegebenen Formänderungsgesetz genügt. Sei  $(\dot{\sigma}_{ik}^*)$  ein künstliches, als „zulässiges System“ bezeichnetes System von Spannungsableitungen, das den Gleichgewichtsbedingungen, den auf  $S_1$  vorgeschriebenen Randbedingungen genügt und der Bedingung  $\sum_{i,k} s_{ik} \dot{\sigma}_{ik}^* \leq 0$  im plastischen Bereich der Lösung. Dann gilt das Minimumsprinzip  $F(\dot{\sigma}_{ik}) \leq F(\dot{\sigma}_{ik}^*)$ , wobei

$$F(\dot{\sigma}_{ik}^*) = \frac{1}{4G} \int_V \sum_{i,k} \dot{\sigma}_{ik}^* \dot{s}_{ik}^* dV - \int_{S_2} \sum_i \dot{T}_i^* \dot{u}_i dS_2$$

( $G$  = Schubmodul); das Gleichheitszeichen gilt nur für  $\dot{\sigma}_{ik}^* = \dot{\sigma}_{ik}$ . — Das zweite Minimumsprinzip bezieht sich auf einen Spannungszustand, bei dem im plastischen Gebiet überall  $J_2 = 0$  ist. Das System  $(\dot{\epsilon}_{ik})$  heißt Lösung, wenn 1. die Verträglichkeitsbedingungen und die Inkompressibilitätsbedingung und 2. die Randbedingung längs  $S_2$  erfüllt sind und 3.  $(\dot{\epsilon}_{ik})$  durch das Formänderungsgesetz mit einem System  $(\dot{\sigma}_{ik})$  verknüpft ist, das den Gleichgewichtsbedingungen und den Randbedingungen auf  $S_1$  genügt. Sei  $(\dot{\epsilon}_{ik}^*)$  ein künstliches, als „zulässiges System“ bezeichnetes System von Dehnungsgeschwindigkeiten, das den Verträglichkeitsbedingungen, der Inkompressibilität genügt und dessen zugehörige Verschiebungsgeschwindigkeiten die Randbedingungen längs  $S_2$  erfüllen. Dann gilt das Minimumsprinzip.  $H(\dot{\epsilon}_{ik}) \leq H(\dot{\epsilon}_{ik}^*)$ , wobei

$$H(\dot{\epsilon}_{ik}^*) = G \int_V \left\{ \sum_{i,k} \dot{\epsilon}_{ik}^* \dot{\epsilon}_{ik}^* - \mu^* \sum_{i,k} s_{ik} \dot{\epsilon}_{ik}^* \right\} dV - \int_{S_1} \sum_i \dot{T}_i \dot{u}_i^* dS_1$$

mit  $\mu^* = 0$ , falls  $J_2 < k^2$ ;  $\mu^* = \frac{\sum s_{pq} \dot{\epsilon}_{pq}^*}{2k^2}$ , falls  $J_2 = k^2$ . Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn  $(\dot{\epsilon}_{ik}^*)$  eine Lösung ist. Moufang (Frankfurt a. M.).

**Pizzetti, Giulio:** Contributo allo studio del problema di de Saint-Venant in campo elasto-plastico. Comment. Pontificia Acad. Sci. 11, 1—30 (1947).

Colonnetti hat für idealplastische Stoffe Formeln für die Spannungsverteilung angegeben bei elastisch-plastischer Biegung bzw. Torsion und für den Fall der Biegung mit Schub bzw. Biegung mit exzentrisch angreifendem axialem Druck [Comment. Pontificia Acad. Sci. 2, 130—150 (1938); dies. Zbl. 23, 277, und eine im Druck befindliche Arbeit]. Im Anschluß hieran diskutiert Verf. für einfache Querschnitte diese Formeln bezüglich der Ausbreitung der plastischen Zone in Abhängigkeit von der äußeren Belastung. Im Falle der Beanspruchung auf Biegung mit Schub wird vorausgesetzt, daß der Eintritt des Fließens allein dadurch veranlaßt wird, daß die Längsspannung die Fließgrenze des Materials überschreitet. Aus dieser Hypothese ergibt sich dann, daß in der elastischen Zone, wo plastische Längsdehnungen fehlen, trotzdem plastische Schiebungen auftreten, so daß im Augenblick des Auftretens plastischer Längsdehnungen am Rand sofort der ganze Querschnitt plastiziert wird. In Verbindung damit steht eine Verdrehung der Spannungshauptachsen gegenüber dem Fall reinelastischer Beanspruchung. — Im Falle der Biegung mit axialem Druck geben die erhaltenen Formeln Aufschluß über die Abhängigkeit der Lage der neutralen Achse von der Größe der plastischen Außenzonen des Querschnitts, die entweder nur an einem Rand oder an beiden Rändern auftreten können.

Moufang (Frankfurt a. M.)

## Hydrodynamik:

Synge, J. L.: On the motion of three vortices. Canadian J. Math. 1, 257—270 (1949).

Verf. bringt eine qualitative Klassifikation aller möglichen Konfigurationen, die bei Bewegung von drei unendlich langen, geradlinigen, parallelen Wirbelfäden in einer zu diesen senkrechten Ebene entstehen können. Nach Formulierung von



notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer für alle Zeiten starren Anordnung (gleichseitiges Dreieck oder geradlinige Anordnung mit Nebenbedingung) werden ausführlich variable Konfigurationen betrachtet. Hierbei erweist es sich als zweckmäßig, jeder Konfiguration (charakterisiert durch die Längen  $R_1, R_2, R_3$  der Dreiecksseiten) gemäß den Beziehungen  $x_v = R_v(R_1 + R_2 + R_3)^{-1}$  ( $v = 1, 2, 3$ ) drei Zahlen  $x_1, x_2, x_3$  ( $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ) zuzuordnen, die als Abstände eines gewissen Punktes von den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks mit der Höhe 1 gedeutet werden können. Bei Bewegung des Wirbelsystems beschreibt dieser Punkt im allgemeinen eine Kurve  $C$ . Von dieser werden die Differentialgleichungen aufgestellt; die nähere Diskussion zeigt alsdann, daß sich wesentlich verschiedene Typen von Kurven  $C$  und also von Wirbelbewegungen ergeben, je nachdem  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \gtrless 0$  ist ( $x_1, x_2, x_3$  die Wirbelstärken). *Maruhn* (Dresden).

**Kochin (Kočin), N. E.:** Calculation of the hydrodynamic characteristics of a large interval grid. Priklad. Mat. Mech., Moskva 11, 85—96 u. engl. Zusammenfassg. 96 (1947) [Russisch].

Die Arbeit stellt eine Näherungstheorie der Strömung durch ein ebenes Gitter dar, dessen Achse um den Winkel  $\beta$  gegen die  $y$ -Achse geneigt ist und dessen Teilung im Vergleich zur Flügeltiefe  $t$  groß ist. Die Arbeit benutzt bekannte konforme Abbildungen und entwickelt diese nach dem Parameter  $1/t$ , wobei Glieder der Ordnung  $1/t^4$  und höherer Ordnung vernachlässigt werden. Auf diese Weise gelingt es, verhältnismäßig einfache Zusammenhänge zwischen den Konstanten zu gewinnen. Außer einem Streckengitter wird als Beispiel eines aus Kreisbogenprofilen behandelt. In einem letzten Paragraphen wird schließlich gezeigt, wie man mit Hilfe der gegebenen Theorie zu einem beliebig gegebenen Gitter ein gleichwertiges Streckengitter gewinnen kann. *Riegels* (Göttingen).

**Sacharnyj, N. F.:** Strömung ohne Ablösung um ein System von zwei Bögen gegebener Form. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 445—448 (1949) [Russisch].

**Žukovskij, M. I.:** Bestimmung einer reinen Zirkulationsströmung um ein Profilgitter. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 457—458 (1949) [Russisch].

**Wuest, W.:** Beitrag zur instationären laminaren Grenzschicht an ebenen Wänden. Ingenieur-Arch. 17, 193—198 (1949).

Für instationäre Grenzschichtströmungen, die von der Entfernung in Strömungsrichtung unabhängig sind, läßt sich die Bewegungsgleichung auf die Wärmeleitungsgleichung zurückführen. Seit langem bekannt ist die Lösung für eine Wand, die bei anfänglich ruhender Flüssigkeit plötzlich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt wird. Mit Hilfe von Rekursionsformeln des Fehlerintegrals gelingt Verf. die geschlossene Integration für den Fall, daß die Wandgeschwindigkeit durch ein Polynom in der Zeitkoordinate darstellbar ist; für konstante Wandbeschleunigung vereinfacht sich dabei die Gestalt des Geschwindigkeitsprofils. Als Vorstudie zu einer späteren Arbeit (s. nachsteh. Referat) wird das instationäre Analogon zur stationären Grenzschichtabsaugung untersucht, indem parallel zur ersten Wand eine zweite gedacht wird, die zunächst mit einer solchen Geschwindigkeit bewegt wird, daß die ursprüngliche Grenzschichtentwicklung längs der ersten Wand nicht beeinflusst wird. Erst von dem Zeitpunkt an, in welchem die zweite Wand zur Ruhe gebracht wird, bildet sich an ihr eine zweite Grenzschicht; ihr Geschwindigkeitsprofil wird durch eine passende Mittelwertbildung über ein Lösungsintegral, deren Form sich aus seinem asymptotischen Verhalten anbietet, gegenüber einer von A. Betz stammenden Näherung, welche nur die Haftbedingung erfüllte, wesentlich verbessert. — Für die Strömung an der Grenzfläche zweier Flüssigkeiten verschiedener Dichte und Zähigkeit mit instationärem Druckfeld ergibt sich ein zeitunabhängiges Verhältnis von Grenzflächengeschwindigkeit und ungestörter Geschwindigkeit.

*Pretsch* (Frankfurt a. M.-Höchst).

**Wuest, W.:** Entwicklung einer laminaren Grenzschicht hinter einer Absaugstelle. Ingenieur-Arch. 17, 199—206 (1949).

Um das einfache Modell einer Absaugstelle in der Plattenströmung zu untersuchen, wird an einer bestimmten Stelle der Hauptplatte parallel zu ihr eine Nebenplatte so angeordnet, daß zwischen beiden ein Schlitz entsteht, durch welchen gerade der zwischen den Platten einströmende Grenzschichtanteil abgeschnitten wird. Die Anfangsbedingungen an der Nebenplatte unterscheiden sich von denen der Hauptplatte, indem an der Vorderkante nicht ein konstantes Profil, sondern ein Blasius-Restprofil anströmt. Die Entwicklung der Grenzschicht an der Nebenplatte wird durch Verallgemeinerung der für große Werte der Stromfunktion gewonnenen asymptotischen Entwicklung in zwei Näherungsschritten berechnet.

*Pretsch* (Frankfurt a. M.-Höchst).

**Meißner, Walther und Gerhard U. Schubert:** Kritische Reynoldssche Zahl für Rohrströmung und Entropieprinzip. Ann. Physik, VI. s. 3, 163—182 (1948).

Verff. setzen voraus: 1. die Möglichkeit, eine laminare Rohrströmung auch bei höheren Re-Zahlen als der kritischen ( $Re \approx 2000$ ) zu erzeugen, ist als „anormale Erscheinung ähnlich der Überhitzung einer siedenden Flüssigkeit“ zu betrachten; 2. „bei genügend langer Anlauf- und Auslaufstrecke ist die Art der Turbulenz in einem glatten Rohr ganz unabhängig von den Vorgängen an der Einlauf- und Auslaufstelle und unter sonst gleichen Umständen immer die gleiche“ („ideale Turbulenz im Rohr“). — Unter diesen Voraussetzungen wird der Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung von den Verff. als eine Frage der Wahrscheinlichkeit der Strömungsart aufgefaßt und als thermodynamisch berechnete und daher physikalisch eintretende Strömungsart diejenige mit den höheren Entropiewerten angesehen. Um im Gebiet der turbulenten Strömung noch quasi-stationäre Lösungen zu erhalten, behandeln die Verff. statt eines zylindrischen Rohres (in dem die Geschwindigkeit bis zum Umschlag und darüber hinaus gesteigert wird) ein schwach konisches Rohr mit einer nach der engen Seite hin gerichteten Strömung von solcher Geschwindigkeit, daß etwa in Rohrmittle der Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung erfolgt. Für die laminare Strömung wird eine strenge Lösung der Grundgleichungen durch Reihenentwicklungen gegeben. Für die turbulente Strömung halten die Verff. eine strenge Lösung „nicht für unmöglich“, benutzen aber eine angenäherte Lösung unter Verwendung empirischer Ergebnisse von Blasius (für den Druckverlauf) und Nikuradse (für die Schubspannung). Eine Auftragung des Entropieverlaufes über der Rohrlänge zeigt dann, daß unterhalb einer gewissen „kritischen“ Re-Zahl die Entropie der laminaren, oberhalb dieser die Entropie der turbulenten Lösung die größeren Werte besitzt. Den Schnittpunkt erhalten sie bei  $Re = 1600$  bzw. bei Annahme eines neueren empirischen Widerstandsgesetzes (an Stelle des Blasiuschen) bei  $Re = 1900$ .

*Riegels* (Göttingen).

**Nigam, S. D.:** On development of turbulent liquid motion over an infinite plate. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, VII. s. 39, 867—873 (1948).

M. Ray [Philos. Mag., J. Sci., London, VII. s. 27, 240—248 (1939); dies. Zbl. 20, 265 und Zbl. f. Mech. 9, 185] behandelt die zeitliche Ausbildung einer turbulenten, nur von  $y$  (der Koordinate senkrecht zur Wand) abhängigen Grenzschicht mit Hilfe der Taylorschen Wirbeltransport-Theorie. Seine Lösungen waren in unmittelbarer Nachbarschaft der Platte nicht mehr gültig, weil die Zähigkeitsglieder in der Bewegungsgleichung vernachlässigt waren. Der Verf. versucht das Problem unter Einbeziehung dieser Glieder und Berücksichtigung der laminaren Unterschicht zu lösen.

*Riegels* (Göttingen).

**Nigam, S. D.:** On turbulent liquid motion outside a circular boundary. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, VII. s. 39, 873—877 (1948).

Das im Titel bezeichnete Problem versuchte M. Ray [Philos. Mag., J. Sci., London, VII. s. 28, 231 (1939)] mit Hilfe der Taylorschen Wirbeltransport-Theorie



zu lösen. Verf. gibt diesem bisher nur numerisch vorliegenden Integrationsversuch eine analytische Form, indem er einen speziellen Ansatz für den Prandtlschen Mischungsweg einführt.

Riegels (Göttingen).

**Kármán, Theodore von:** Progress in the statistical theory of turbulence. Proc. nat. Acad. Sci., USA **34**, 530—539 (1948).

Verf. gibt einen kurzen Überblick über die Fortschritte der statistischen Theorie der Turbulenz. Nach ganz kurzem Hinweis auf ältere Ansätze beginnt die Arbeit mit der Feststellung, daß die wichtige Definition der isotropen Turbulenz durch Taylor ein neues Entwicklungsstadium einleitet, welches dadurch gekennzeichnet ist, daß die Theorie gewisse Größen — Korrelations- und Spektralfunktionen — einführt, die der Messung im Windkanal zugänglich sind. Kármán und Howarth führen so die Doppel- und Dreifachkorrelationen zwischen den an zwei Punkten im Abstand  $r$  beobachteten Geschwindigkeitskomponenten ein und folgern aus den Navier-Stokeschen Differentialgleichungen eine Beziehung zwischen den Dreifachkorrelationen  $h(r)$  und der zeitlichen Ableitung der Zweifachkorrelationsfunktion  $f(r)$ . Deren Diskussion führt zunächst auf zwei Spezialfälle: a) kleine Re-Zahlen:  $h(\lambda)$  vernachlässigbar;  $f(\lambda)$  ergibt sich als Funktion von  $r/\lambda$ , wo  $\lambda$  definiert ist durch  $du'/dt = -10\nu\bar{u}^2/\lambda^2$ , b) große Re-Zahlen:  $f$  und  $h$  Funktionen von  $r/L$  ( $L$  charakteristische Länge für die Turbulenz, „scale of turbulence“); drei einfache Fälle: 1.  $L = \text{konst.}$ ; dann  $\bar{u}^2 \sim t^{-2}$  (Taylor), 2.  $\bar{u}^2 \int_0^\infty r^4 f(r) dr$

unabhängig von der Zeit, d. i.  $\bar{u}^2 L^5 = \text{konst.}$ ; dann  $\bar{u}^2 \sim t^{-10/7}$ ;  $L \sim t^{2/7}$  (Loitziansky), 3.  $\bar{u}^2 \sim t^{-1}$ ;  $L \sim t^{1/2}$  (Dryden). Weiterhin führte Taylor eine Spektralfunktion  $F_1(\kappa_1)$

( $\kappa_1$  = Wellenzahl der Schwankung, gemessen in  $x_1$ -Richtung) für die Energie, die durch einen bestimmten Querschnitt einer turbulenten Strömung hindurchtritt, ein. — Verf. bemerkt, daß alle diese Ergebnisse analytische und experimentelle Grundlagen darstellen, daß aber zunächst niemand an die Auffindung der Gesetzmäßigkeiten für die Gestalt der Korrelations- und Spektralfunktionen herang. Ansätze in dieser Richtung sind erst neuerdings mit den Arbeiten von Kolmogoroff, Onsager, Weizsäcker und Heisenberg gemacht worden. Verf. gibt eine neue zusammenfassende Ableitung dieser Erkenntnisse, wobei er die Zusammenhänge zwischen Spektrum und Korrelationsfunktion hervorhebt. Bei großen Re-Zahlen ist z. B. die Annahme,  $f(r)$  sei eine Funktion von  $r/L$ , äquivalent mit der Annahme, daß das Spektrum  $F$  eine Funktion der dimensionslosen Variablen  $\kappa/\kappa_0$  sei ( $\kappa$  = Wellenzahl der turbulenten Schwankung;  $\kappa_0 \sim 1/L$ ).

Verf. schreibt  $F(\kappa) = (u^2/\kappa_0) \Phi(\xi)$  (wobei  $\xi = \kappa/\kappa_0$ ) und gibt eine Differentialgleichung für den Verlauf von  $\Phi(\xi)$ . Da deren Lösung einigen Aufwand erfordert, schlägt er zunächst für  $\Phi$  die folgende Interpolationsformel vor:  $\Phi(\xi) = \text{const.} \cdot \xi^4/(1 + \xi^2)^{17/6}$ . Für kleine bzw. große  $\kappa$  ergeben sich so die bekannten Gesetzmäßigkeiten  $F \sim \kappa^4$  bzw.  $F \sim \kappa^{-5/3}$ . Darüber hinaus ergeben sich ebenfalls einfache formelmäßige Darstellungen für das Spektrum  $F(\kappa/\kappa_0)$  und die Taylorsche Spektralfunktion  $F_1(\kappa_1/\kappa_0)$ , sowie die Korrelationsfunktionen  $f(\kappa_0 r)$  und  $g(\kappa_0 r)$ . Diese Ergebnisse vergleicht der Verf. mit neueren, demnächst noch erscheinenden Messungen von Liepmann, Laufer und Liepmann am Cal. Inst. Techn. Pasadena in einem 10-ft.-Windkanal hinter einem Gitter mit der Maschenweite  $M = 4$  inch, und findet ausgezeichnete Übereinstimmung. — Auf die zahlreichen neueren Arbeiten von Batchelor und Townsend geht diese Übersicht nicht ein.

Riegels (Göttingen).

**Batchelor, G. K. and A. A. Townsend:** Decay of turbulence in the final period. Proc. R. Soc. London A **194**, 527—543 (1948).

Verff. fahren fort in der Ausarbeitung ihrer neueren Ansätze zur isotropen Turbulenz. Die Endperiode des Abklingens einer turbulenten Bewegung ist dann erreicht, wenn alle Wirkungen der Trägheitskräfte praktisch vernachlässigbar sind. Es wird theoretisch gezeigt, daß ein asymptotischer statistischer Zustand erreicht wird, welcher von den Anfangsbedingungen unabhängig ist. In diesem Zustand ist die Energie der Turbulenz ( $u^2$ ) proportional  $t^{-5/2}$  ( $t$  = Abklingzeit) und die longitudinale Doppelkorrelation der Geschwindigkeit für 2 Punkte im Abstand  $r$  beträgt  $f(r, t) = e^{-r^2/2\nu t}$ . Der zweite Teil der Arbeit enthält experimentelle Ergebnisse, die dieses theoretisch gewonnene Gesetz bestätigen und seinen Gültigkeitsbereich näher festlegen. Theoretisch war früher [Batchelor and Townsend, Proc. R. Soc. London A **190**, 534 (1947)] gezeigt worden, daß die Trägheitswirkungen vernachlässigt werden können, wenn  $R_2 = \lambda \sqrt{u^2}/r \ll 15$ . Die Messungen haben gezeigt, daß die „Endperiode“ etwa im Bereich  $R_2 < 5$  anzusetzen ist. Um diese sicher zu erreichen, benutzen die Verff. ein Gitter von sehr geringer Maschenweite  $M = 0,159$  cm, hinter dem sie bis zu 1040 Maschenweiten messen konnten. Ge-

messen wurden  $\bar{u}^2$ ,  $\lambda$  und  $f(r)$ . Die Re-Zahlen des Gitters waren  $R = U M/\nu = 650, 950, 1360$ . Es wird gute Übereinstimmung mit den theoretischen Gesetzen [Proc. R. Soc. London A 190, 534 (1947)] erzielt. *Riegels* (Göttingen).

**Lin, C. C.:** Note on the law of decay of isotropic turbulence. Proc. nat. Acad. Sci. USA 34, 540—543 (1948).

Das in vielen Arbeiten der letzten Zeit behandelte Gesetz über das Abklingen der isotropen Turbulenz wird hier von der Seite der Kolmogoroffschen Konzeption der Turbulenz bei hohen Re-Zahlen her aufgegriffen. Eine weitere Veröffentlichung hierzu wird angekündigt. *Riegels* (Göttingen).

**Dobroklonskij, S. V.:** Turbulente Zähigkeit in der Oberflächenschicht des Meeres und Wellengang. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 58, 1345—1348 (1947) [Russisch].

Der Kármánsche Koeffizient der turbulenten Zähigkeit wird für die von Betz untersuchte ebene Potentialströmung längs einer wellenförmigen Wand berechnet und mit Messungen von Jeffreys an der Meeresoberfläche des Zentralatlantik verglichen. *Pretsch* (Frankfurt a. M.-Höchst).

● **Purdaj, H. F. P.:** Streamline flow: an introduction to the mechanics of viscous flow, film lubrication, the flow of heat by conduction, and heat transfer by convection. London: Constable and Co., Ltd., 1949. VIII, 185 p. 18 s. net.

\* **Truesdell, C.:** On the total vorticity of motion of a continuous medium. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 73, 510—512 (1948).

Es wird bewiesen, daß der Satz von Poincaré über die zeitliche Konstanz der Gesamtrotation in der ebenen Strömung einer inkompressiblen, zähen Flüssigkeit für die allgemeine Bewegung jedes zusammenhängenden Mediums gilt, falls die Bewegung im Unendlichen stark genug abklingt. Ferner ist die Änderung der Gesamtrotation in einem beliebigen Volumen vom Bewegungszustand in allen in seinem Innern gelegenen Punkten unabhängig. Aus der Anwendung dieser Sätze auf eine zähe, kompressible Flüssigkeit folgt, daß die Diffusion der Rotation durch drei Mechanismen bewirkt wird, nämlich durch die Kompressibilität der Flüssigkeit an der Grenzfläche, durch die Drehung des Rotationsfeldes um Achsen tangential zur Grenzfläche und durch die Inhomogenität der Flüssigkeit auf der Grenzfläche. Für zähe, inkompressible Flüssigkeit und für ideale, kompressible Flüssigkeit sind die Sätze über die Diffusion eng mit dem Bjerknessen Zirkulationssatz verknüpft. *Pretsch* (Frankfurt a. M.-Höchst).

**Truesdell, C.:** On the transfer of energy in continuous media. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 73, 513—515 (1948).

Für ein endliches Volumen eines Newtonschen Kontinuums wird die zeitliche Änderung der kinetischen Energie als Summe von fünf Integralen ausgedrückt, deren physikalischer Inhalt einzeln gedeutet wird. Der allgemeine Satz des Energieübergangs wird sodann auf die Strömung kompressibler, zäher Flüssigkeiten angewendet; für inkompressible Flüssigkeiten wurde der entsprechende Satz früher von Bobileff und Forsyth aufgestellt. *Pretsch* (Frankfurt a. M.-Höchst).

**Howarth, L.:** Concerning the effect of compressibility on laminar boundary layers and their separation. Proc. R. Soc. London A 194, 16—42 (1948).

Die Differentialgleichungen der laminaren, kompressiblen Grenzschicht der ebenen Platte bei konstantem Druck lassen sich auf den inkompressiblen Fall zurückführen, wenn die Prandtlsche Zahl den Wert 1 hat und die Zähigkeit proportional der Temperatur angenommen wird (Hantzsche-Wendt 1940, Crocco). Verf. behandelt für solche Strömungen das Thermometerproblem für die ebene Platte (in der positiven  $x$ -Achse liegend) in der Nachbarschaft eines Staupunkts und entwickelt die Lösungsmethoden für den Fall, daß die Geschwindigkeit  $U$  der Potentialströmung am Rande der Grenzschicht nach steigenden Potenzen von  $x$  entwickelt gegeben ist:  $U = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots (\beta_1, \beta_2, \dots \text{Konstante})$ . Insbeson-



dere untersucht er die Frage der Ablösung für einen linearen, retardierenden Geschwindigkeitsgradienten ( $U = U_0 - U_1 x$ ;  $U_0, U_1$  Konstante). Es ergibt sich, daß die Ablösung bei kompressiblen Grenzschichtströmungen eher eintritt als bei der inkompressiblen Strömung. Wie im Falle der Plattenströmung mit konstantem Druck, so stößt man auch bei den behandelten allgemeineren Strömungen auf Funktionen der inkompressiblen Theorie.

Wendt (Bonn).

**Vaszyoni, Andrew:** A new derivation of the method of characteristics for axially symmetrical supersonic flow. Quart. appl. Math. 5, 499—503 (1948).

Überraschend einfach leitet Verf. aus Wirbelsatz und Kontinuitätsgleichung die Differentialgleichungen erster Ordnung für Richtungswinkel  $\Theta$  und Geschwindigkeit  $V$  einer stationären, axialsymmetrischen Überschallgasströmung her. Geschrieben mit den Ableitungen nach den Bogenlängen  $l$  und  $n$  in Richtung der Stromlinien und senkrecht dazu lauten sie unter Einführung der Drehungskomponente  $\omega$ , des Achsenabstandes  $r$  und der Mach-Zahl  $M = V/a > 1$ ,  $a$  Schallgeschwindigkeit,  $\sqrt{M^2 - 1} = \cot \alpha$ ,  $\alpha$  Maschscher Winkel,

$$(*) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial l} - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{2\omega}{V}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial n} - \frac{M^2 - 1}{V} \frac{\partial V}{\partial l} = -\frac{\sin \Theta}{r}.$$

Verf. gewinnt daraus die charakteristischen Bedingungen längs der Machschen Wellen. Ref. möchte noch bemerken, daß sich (\*) mittels des zum Linienelement  $(dl, dn)$  bezüglich der Riemannschen Metrik  $dS^2 = -dl^2/(M^2 - 1) + dn^2$  orthogonalen Elementes ( $\tilde{dl} = dn \sqrt{M^2 - 1}$ ,  $\tilde{dn} = dl \sqrt{M^2 - 1}$ ) (mit dem entgegengesetzt gleichen Riemannschen Längenquadrat) in die eine Differentialrelation

$$d\Theta - \tilde{dJ} = \frac{\sin 2\alpha}{2\kappa R} \tilde{ds} - \frac{\sin \Theta}{r^2 \rho V} d\psi$$

zusammenfassen lassen (im Fall des idealen Gases,  $R$  Gaskonstante,  $\kappa$  konst.,  $\rho$  Dichte,  $s$  Entropie pro Masseneinheit,  $J = \int \cot \alpha d \ln V$ ,  $\psi$  Stromfunktion). Hieraus folgen die charakteristischen Gleichungen in einer von Guderley angegebenen Form. Im Fall der isentropischen (drehungsfreien), ebenen ( $r = \infty$ ) Strömung ergeben sich [wie bei der eindimensionalen instationären Gasbewegung, vgl. E. Hölder, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 14, 338—350 (1941); dies. Zbl. 25, 179] ohne weiteres die Integrale  $\Theta \pm J = \text{konst.}$  der Charakteristiken mit den Richtungswinkeln  $\Theta \mp \alpha$ .

E. Hölder (Leipzig).

**Falkovich (Falkovič), S. V.:** On the theory of a wing of finite span in a supersonic flow. Priklad. Mat. Mech., Moskva 11, 391—394 u. engl. Zusammenfassg. 394 (1947) [Russisch].

Für die Berechnung des Geschwindigkeitspotentials einer Überschallströmung in der Umgebung eines Tragflügels endlicher Spannweite wird die Volterrassche Formel zur Lösung des Cauchyschen Integrals herangezogen. Die Betrachtungen, welche die Methode der kleinen Störungen benutzen, werden für das stationäre Problem und auch für den schwingenden Flügel ausgeführt.

H. Schlichting.

**Lotkin, Mark:** Supersonic flow over bodies of revolution. Quart. appl. Math. 7, 65—74 (1949).

Verf. behandelt Überschallströmungen um dünne nichtangestellte Rotationskörper. Die Differentialgleichungen für die Strömung werden nach den Abweichungen von der Kegelströmung, die die Nase des Profils bestimmt, linearisiert und nach der Charakteristikenmethode behandelt.

Wendt (Bonn).

**Neményi, P. and R. Prim:** Some geometric properties of plane gas flow. J. Math. Physics, Massachusetts 27, 130—135 (1948).

Für ebene, stetige Strömungen eines vollkommenen Gases werden Sätze der Art bewiesen: Die Machsche Zahl ist nur dann auf jeder Stromlinie konstant, wenn alle Stromlinien konzentrische Kreise oder parallele Geraden sind. — In rotationsbehafteten, ebenen Strömungen eines vollkommenen Gases stimmen die Linien

konstanten Geschwindigkeitsbetrages nur dann mit den Linien konstanten Betrags der Rotation überein, wenn sie Stromlinien sind. *Wendt (Bonn).*

**Bergman, Stefan:** *Two-dimensional subsonic flows of a compressible fluid and their singularities.* Trans. Amer. math. Soc. **62**, 452—498 (1947).

Das Studium von zweidimensionalen Potentialströmungen kompressibler Flüssigkeiten geht stets von der Betrachtung inkompressibler Strömungen aus. Das bekannte Verfahren von Tschaplygin gestattet, jeder inkompressiblen Strömung eine kompressible zuzuordnen, wobei die definierenden Funktionen in der Hodographenebene betrachtet werden. Diese Transformation hat, ebenso wie eine ältere vom Verf. angegebene, den Nachteil, nur auf Potenzreihen anwendbar zu sein, während eine neuere Transformation [vgl. Bergman, Trans. Amer. math. Soc. **57**, 299—331 (1945)] unmittelbar auf eine in einem beliebigen Bereiche gegebene analytische Funktion anwendbar ist. Diese darf gewisse Singularitäten haben, und eine Hauptaufgabe besteht darin, die Natur der transformierten Singularitäten zu untersuchen. Besonders ist die Frage nach der lokalen Eindeutigkeit wenigstens einer der beiden charakterisierenden Funktionen, Potential- oder Stromfunktion, wichtig. Darüber sowie über das Zustandekommen schlichter Strömungsgebiete beim Übergang von der Hodographenebene in die physikalische Ebene werden Sätze aufgestellt. Schließlich werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die Abbildungen der physikalischen Ebene auf die Hodographenebene und gewisse, mit der letzteren elementar zusammenhängende, weitere Ebenen quasi-konform sind, d. h. einen infinitesimalen Kreis in eine infinitesimale Ellipse mit gleichmäßig beschränktem Achsenverhältnis überführen. *Brödel (Jena).*

• **Zucrow, M. J.:** *Principles of jet propulsion and gas turbines.* New York: John Wiley and Sons, Inc.; London: Chapman and Hall, Ltd., 1948. XIV, 563p. 39 s. net.

• **Jaeger, Charles:** *Technische Hydraulik.* Basel: Verlag Birkhäuser, 1949. 480 Seiten mit 303 Abbildungen. Ganzleinen Fr. 48,50, broschiert Fr. 44,50.

## Elektrodynamik:

**Cotte, Maurice:** *Potentiel et champ d'une électrode plane percée d'un trou elliptique.* C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 377—378 (1949).

**Kahan, T. et G. Eckart:** *La propagation des ondes électromagnétiques au-dessus du sol. Solution du problème de Ponde de surface.* J. Physique Radium, VIII. s. **10**, 165—176 (1949).

Zur Theorie der Ausbreitungsverhältnisse elektromagnetischer Wellen von Sendern haben in erster Linie beigetragen Sommerfeld einerseits und Weyl bzw. Noether andererseits. Die Wellengleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$  ist dabei zu lösen für zwei Gebiete verschiedener Ausbreitungskonstanten (Erdboden—Luft), deren Lösungen durch Randbedingungen einander angepaßt werden. Sommerfeld geht von einer Zylinderwellenentwicklung aus, während Weyl die Strahlung nach ebenen Wellen entwickelt und diese an der Grenzschicht reflektieren läßt. Sommerfeld findet in dem so entstehenden Wellenkomplex eine Oberflächen-, d. h. mit  $1/\sqrt{r}$  abnehmende Welle, die in großer Entfernung die mit  $1/r$  abnehmende Raumwelle überwiegt, während bei Weyl keine derartige Oberflächenwelle auftritt. Nach Erläuterung beider Rechenmethoden behaupten Verf., daß die Oberflächenwelle die Ausstrahlungsbedingung gar nicht erfüllen würde und daß sie nur durch ein mathematisches Versehen zustande komme, wenn man in der asymptotischen Lösung einen zum Integral beitragenden Sattelpunkt nicht berücksichtigt. *Mann.*

**Duffin, R. J.:** *Nonlinear networks.* IIa. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 963—971 (1947).

Die Arbeit behandelt elektrische Netze, in denen keine Proportionalität von



Strom und Potentialabfall herrscht, dagegen beide Variablen nichtabnehmende Funktionen voneinander sind. Unter Benutzung der von Maxwell herrührenden Gleichungen

$$u_i = \sum_{j=0}^n g_{ij}(v_i - v_j) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

für den Strom, der von außen her durch den  $i$ -ten Knotenpunkt des Netzwerkes geleitet wird, wird bewiesen, daß unter den Voraussetzungen  $\sum_{i=0}^n u_i = 0$  und

a)  $g_{ij}(x) = -g_{ji}(-x)$  ist stetig für alle  $x$ , b) entweder ist  $g_{ij}(x) \equiv 0$  oder eine wachsende Funktion für alle  $x$  mit dem Grenzwert  $\infty$  für  $k \rightarrow \infty$ , c) Erfüllung der „Kettenbedingung“ — mit der Festsetzung  $v_0 = 0$  eine eindeutig bestimmte Lösung für die Potentiale  $v_i$  existiert. Dabei bedeutet die Kettenbedingung, daß für jedes  $i$  eine geordnete Folge von ganzen Zahlen  $i, a, b, c, \dots, e, f$  existiert, so daß keine Funktion der Folge  $g_{ia}, g_{ab}, g_{bc}, \dots, g_{ef}, g_{f0}$  identisch verschwindet. Es wird eine neue Analogie zwischen elektrischen und elastischen Netzen aufgestellt und zur Lösung gewisser Probleme benutzt.

Schmeidler (Berlin).

**Duffin, E. J.: Nonlinear networks. IIb.** Bull. Amer. math. Soc. **54**, 119—127 (1948).  
Eine Transformation

$$\begin{aligned} y_1 &= P_1(x_1, x_1 - x_2, \dots, x_1 - x_n), \\ y_2 &= P_2(x_2 - x_1, x_2, \dots, x_2 - x_n), \\ &\vdots \\ y_n &= P_n(x_n - x_1, x_n - x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

(alle Funktionen und Variablen sind reell) habe die Eigenschaften a)  $P_i(t_1, \dots, t_n)$  ist eine stetige Funktion von  $t_1, \dots, t_n$ , b)  $P_{ij}$  wächst entweder unbeschränkt zu  $\pm \infty$  oder ist konstant; c) es gibt für jedes  $i$  eine Folge von ganzen Zahlen  $a, b, \dots, g, h$ , so daß in der Kette  $P_{ia}, P_{ab}, \dots, P_{gh}, P_{hh}$  jede Funktion unbeschränkt gegen  $\pm \infty$  geht. ( $P_{ij}$  bedeutet  $P_i$  als Funktion von  $t_j$ , wobei die anderen Variablen beliebige feste Werte haben). Eine solche Transformation hat bei beliebig vorgegebenen Werten  $y_1, \dots, y_n$  eine eindeutige Lösung  $x_1 = R_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n = R_n(y_1, \dots, y_n)$ , wobei dies eine stetige Transformation ist. — Der Sonderfall linearer Transformationen dieser Art wird im Anschluß an Sylvester genau untersucht.

Schmeidler (Berlin).

**Duffin, R. J.: Nonlinear networks. III.** Bull. Amer. math. Soc. **55**, 119—129 (1949).

Behandelt wird das Differentialgleichungssystem  $Ly' + V(y') + Sy = g$ . Dabei ist  $y$  und  $g$  ein zeitabhängiger  $n$ -dimensionaler Vektor,  $L$  und  $S$  eine positiv definite, konstante, symmetrische Matrix. Die Vektorfunktion  $V(x)$  ist für jeden Vektor  $x$  definiert, und die Matrix  $V'$  der partiellen Ableitung soll ebenfalls für alle  $x$  existieren und symmetrisch sein. Außer  $V(0) = 0$  gilt die Bedingung  $A^{-1}(Ry, y) \leq (V'y, y) \leq A(Ry, y)$ , worin  $A$  eine positive Konstante und  $R$  eine positiv definite, symmetrische Matrix ist. Physikalisch bedeutet  $g$  den Vektor der elektromotorischen Kräfte,  $y$  den der Ladungen in einem Netzwerk von  $n$  Maschen. Es wird der Satz bewiesen, daß das Gleichungssystem im Falle eines periodischen Vektors  $g(t) = g(t + 2\pi)$  stets eine und nur eine periodische Lösung besitzt. — Zum Beweise werden zunächst einige Überlegungen angestellt, aus denen hervorgeht, daß  $L, R$  und  $S$  in einer bestimmten „kanonischen Form“ gewählt werden können. Dies besagt im wesentlichen, daß  $S^2 = S$  gilt und ferner  $L + R$  sowie  $R + S$  nicht singular werden. Die Darstellung  $V(x) = V'x$  (Mittelwertsatz!) ergibt dann auch für die gegebene Gleichung die kanonische Form. Der Hauptgedanke des Beweises bedarf dann der Einführung des „Hilbertschen Raumes“  $H$  der elektromotorischen Kräfte; Elemente sind die periodischen Vektoren  $g(t)$  in  $L^2(0, 2\pi)$ .

das skalare Produkt wird definiert durch  $((x, y)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x, y) dt$ . Um nun die gegebene Gleichung als eine (nichtlineare) Transformation des „Hilbertschen Raumes

der elektrischen Ladungen  $Q$  in  $H$  auffassen zu können (dies ist die wichtigste Beweisidee), muß zunächst der Raum  $Q$  definiert werden. Die kanonische Form gestattet die Definition des skalaren Produktes  $((x, y))_Q = ((Lx'', Ly'')) + ((Rx', Ry')) + ((Sx, Sy))$ , welche die notwendigen Eigenschaften besitzt. Es wird dann bewiesen: Ist  $T$  eine Transformation von  $Q$  in  $H$ , so daß a) für jede Folge  $y_n$  aus  $Q$ , für die  $||T(y_n)|| \leq A$  bleibt, eine Teilfolge  $y_m$  existiert, so daß  $T(y_m)$  schwach gegen  $T(y)$  konvergiert, wo  $y$  zu  $Q$  gehört; b) für jedes  $x$  und  $y$  aus  $Q$  der  $\lim_{h \rightarrow 0} (T(y + hx) - T(y))/h = T'(y, x)$  existiert, wenn  $h$  reell ist; c) für jedes  $y$  aus  $Q$  die Relation  $((T'(y, x), f)) = 0$  für alle  $x$  die Folge  $f = 0$  nach sich zieht, dann ist die Gleichung  $T(y) = g$  für jedes  $g$  in  $H$  lösbar durch ein  $y$  in  $Q$ , und zwar eindeutig. Da die Voraussetzungen als erfüllt nachweisbar sind, ist damit der Satz bewiesen.

Schmeidler (Berlin).

**Barozzi, Francesco:** Sul bilancio di potenza in una rete elettrica ad  $m$  morsetti in regime sinusoidale di correnti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 5, 385—391 (1948).

Considerata una rete comunque complessa, alimentata attraverso  $m$  morsetti e percorsa da corrente alternata di pulsazione  $\omega$ , e indicati con  $V_k$  e  $I_k$  i numeri complessi che rappresentano, rispettivamente, le tensioni e le correnti in un morsetto generico, l'A. ricava le relazioni:

$$(1) \sum_{k=1}^n V_k I_k^* = P_j + 2j\omega(W_m - W_e), \quad (2) \sum_{k=1}^n V_k I_k = P_{jf} + 2j\omega(W_{mf} - W_{ef})$$

dove  $j$  è l'unità immaginaria,  $I_k^*$  il coniugato di  $I_k$ ,  $P_j$  la potenza media (in un periodo) dissipata per effetto Joule,  $W_m$  e  $W_e$  il valor medio, sempre in un periodo, dell'energia elettrica e magnetica,  $P_{jf}$ ,  $W_{mf}$ ,  $W_{ef}$  sono numeri complessi che, moltiplicati per  $e^{2j\omega t}$ , hanno per parte reale, la componente fluttuante, rispettivamente, della potenza dissipata, dell'energia magnetica, dell'energia elettrica. L'A. indica infine le semplificazioni di (1) e (2), quando sono trascurabili le mutue induzioni fra i rami della rete, e quando le tensioni e le correnti dei primi  $q$  morsetti costituiscono un sistema polifase simmetrico e equilibrato.

Graffi (Bologna).

## Optik:

**Storruste, A. and H. Wergeland:** On two complementary diffraction problems. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 73, 1397—1398 (1948).

In der Arbeit handelt es sich um die Beugung (von Schallwellen) an einer kreisrunden Scheibe einerseits, an einer kreisrunden Öffnung (gleicher Größe) in einem undurchlässigen Schirm andererseits, also um das Babinetsche Theorem, das indessen als solches nur Gültigkeit besitzt, wenn die Wellenlänge klein gegen den Radius der beugenden Öffnung bzw. des beugenden kreisförmigen Schirmes ist. Die Verf. behandeln die Frage nicht nur für jenen Grenzfall, sondern allgemein, indem sie sphäroidale Koordinaten  $\alpha, \beta, \gamma$  durch die Beziehungen

$$x + iy = a\sqrt{(1 + \alpha^2)(1 - \beta^2)} \cdot e^{i\gamma}, \quad z = a\alpha\beta$$

einführen, wobei  $a$  den Radius der Öffnung bzw. des Schirmes bezeichnet. In einer graphischen Darstellung geben sie in Abhängigkeit von  $2\pi a/\lambda$  das Verhältnis der durchgelassenen bzw. gestreuten Gesamtenergie zum  $\pi a^2$ -fachen der Intensität der einfallenden Welle. Man erkennt die durch das Babinetsche Prinzip ausgesprochene Beziehung als eine Grenzbeziehung. Picht (Potsdam-Babelsberg).

**Levine, Harold and Julian Schwinger:** On the theory of diffraction by an aperture in an infinite plane screen. I. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 74, 958—974 (1948).

Für die Behandlung der Beugung einer skalaren, ebenen Welle an einer Öffnung in einem unendlich ausgedehnten, ebenen Schirm (auf ihm soll die Wellenfunktion verschwinden) wird eine neue und vielversprechende Methode entwickelt. Die



Wellenfunktion wird durch ihre Werte in der Öffnung dargestellt. Für die Werte in der Öffnung läßt sich eine Integralgleichung angeben. Mit ihrer Hilfe wird die Amplitude der gebeugten Welle in großer Entfernung in eine solche Form gebracht, daß sie bezüglich kleiner Variationen der Felder in der Öffnung, die zu einem Paar von Einfallrichtungen gehören, gegenüber den exakten Werten stationär ist. D.h. das Beugungsproblem wird in die Gestalt eines Variationsproblems übergeführt. Zu seiner näherungsweise Lösung werden einfache Ansätze für das Feld in der Öffnung gemacht, deren verfügbare Koeffizienten durch die Stationaritätsbedingung festgelegt werden. Die Anwendung dieses Verfahrens auf die Beugung einer ebenen Welle, die senkrecht auf eine kreisförmige Öffnung einfällt, gibt, wie ein Vergleich mit strengen Ergebnissen von C. J. Bouwkamp [Diss. Groningen 1941] zeigt, sehr gute Ergebnisse in einem großen Frequenzbereich. *J. Meixner.*

**Levine, Harold and Julian Schwinger:** On the theory of diffraction by an aperture in an infinite plane screen. II. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 75, 1423—1432 (1949).*

Vgl. das obige Referat. Doch werden hier die Wellenfunktionen im Raum durch den Sprung der Normalableitung der Wellenfunktion auf dem Schirm ausgedrückt. Auch hier läßt sich ein der Beugungsaufgabe entsprechendes Variationsproblem finden, in welches statt der Werte der Wellenfunktionen in der Öffnung die Sprungwerte auf dem Schirm eingehen. Dieses Variationsprinzip ist besonders für mittlere und kurze Wellenlängen, das oben genannte für mittlere und lange Wellen geeignet. Der Zusammenhang der beiden Variationsprinzipie wird untersucht. Die Anwendung auf die Beugung einer ebenen Welle, die senkrecht auf eine kreisförmige Öffnung einfällt, zeigt jedoch, daß auch bei sehr großen Wellenlängen dieses zweite Variationsprinzip mit einfachen Näherungsansätzen für die Sprungwerte vorzügliche Ergebnisse liefert, welche überdies noch weniger mathematischen Aufwand erfordern. *J. Meixner (Aachen).*

**Linfoot, E. H.:** On the theory of the zonal Foucault test. *Monthly Not. astron. Soc., London 108, 428—445 (1948).*

Eingehende beugungstheoretische Untersuchung der zur Prüfung optischer Systeme viel benutzten Foucaultschen zonalen Schneidmethode, die vom Verf. zunächst noch einmal kurz in ihrer praktischen Anwendung beschrieben wird. Es wird sodann eine geometrische Theorie der bei Anwendung der Prüfmethode auftretenden Erscheinungen gegeben und diese auf die Prüfung einer Paraboloidfläche angewandt. Die Voraussagen der geometrischen Theorie weichen verhältnismäßig stark von den Erscheinungen ab, die sich bei den praktischen Versuchen ergaben. Es ist also eine beugungstheoretische Behandlung der Prüfmethode notwendig, um eine Diskussion ihrer systematischen Fehler und ihrer Genauigkeitsgrenzen zu ermöglichen. Es ergibt sich, daß die Methode — unter Einhaltung gewisser Voraussetzungen — bei Prüfung einer Kugelfläche zu brauchbaren Ergebnissen führt, insbesondere nicht durch Kohärenz-Asymmetrien gestört wird. Auch über die Anwendung der zonalen Prüfmethode auf die Untersuchung eines astronomischen Paraboloidspiegels wird berichtet, wobei die Ergebnisse vom Standpunkt der Theorie eingehend diskutiert werden. *Picht (Potsdam-Babelsberg).*

**Risco, M.:** Ondes planes et ondes sphériques dans les problèmes optiques avec mouvement relatif. Cas d'un miroir illuminé par un faisceau convergent. *J. Physique Radium, VIII. s. 10, 128—131 (1949).*

Theoretische Untersuchung der Reflexion eines konvergenten Strahlenbündels an einem bewegten Spiegel. Verf. wird zu dem Ergebnis geführt, daß man dem bewegten ebenen Spiegel einen virtuellen ruhenden Spiegel von hyperbolischer Form, in dessen einem Brennpunkt sich die Lichtquelle befindet, zuordnen kann, um das Phänomen leichter übersehen zu können. [Vgl. hierzu die Arbeit des Ref., *Z. Physik 40, 521—529 (1926).*] *Picht (Potsdam-Babelsberg).*

**Schuster, Kurt:** Anwendung der Vierpoltheorie auf die Probleme der optischen Reflexionsminderung, Reflexionsverstärkung und der Interferenzfilter. *Ann. Physik. VI. s. 4, 352—356 (1949).*

Verf. überträgt die für Leitungsvorgänge der Hochfrequenztechnik sowie in der Akustik oft benutzte Vierpoltheorie auf die Lichtausbreitung durch eine

Folge planparalleler Schichten, indem er bei senkrecht auf die Schichten auftreffender, in Richtung der  $z$ -Achse linear polarisierter ebener Welle das Verhältnis  $E_y/H_z$  als „optischen Wellenwiderstand“  $Z$  des betreffenden Mediums bezeichnet, der in nicht absorbierenden Stoffen reell, in absorbierenden komplex ist. Das entsprechende Verhältnis in einem beliebigen ebenen Wellenvorgang, der sich aus einem hinlaufenden und einem zurückkommenden Anteil zusammensetzt, wird allgemein als „optischer Widerstand“  $\mathfrak{Z}$  bezeichnet. Die Gleichungen, die für  $E_y$  und  $H_z$  in einer Schicht der Dicke  $d$  mit dem komplexen Brechungsindex  $q$  und der komplexen Wellenzahl  $p$  gelten, lassen sich dann zu einer Gleichung für  $\mathfrak{Z}$ , genauer: zwischen den Werten  $\mathfrak{Z}_1$  und  $\mathfrak{Z}_2$  des optischen Widerstandes in der Eingangs- und Ausgangsfläche der Schicht zusammenfassen, derart, daß bei bekanntem  $\mathfrak{Z}_2$  der Wert von  $\mathfrak{Z}_1$  berechnet werden kann. Ist der Brechungsindex des der Schicht folgenden Mediums  $n_2$ , so ist  $\mathfrak{Z}_2 = 1/n_2$ . Das komplexe Amplituden-Reflexionsvermögen  $\Re$  berechnet sich dann aus  $\mathfrak{Z}_1$  und dem optischen Wellenwiderstand  $Z_0$  des der betrachteten Schicht vorgelagerten Mediums zu  $\Re = (\mathfrak{Z}_1 - Z_0)/(\mathfrak{Z}_1 + Z_0)$  und das Energie-Reflexionsvermögen zu  $R = \Re^2$ . — Verf. wendet die entwickelten Gedankengänge auf die Erscheinungen an, die sich bei zwei Schichten mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  zwischen den Medien ( $n_0$ ) und ( $n_3$ ) ergeben, und berechnet die erforderlichen Dicken  $d_1$  und  $d_2$ , für die sich Reflexfreiheit  $\Re = 0$  ergibt. Hinweis auf graphische Lösungsmöglichkeit. *Picht.*

**Ehrenberg, W. and R. E. Siday:** The refractive index in electron optics and the principles of dynamics. Proc. physic. Soc. London, Sect. B 62, 8—21 (1949).

Der Verf. beschäftigt sich eingehend mit dem elektronenoptischen Brechungsindex, insbesondere mit seinem Zusammenhang mit den das elektromagnetische Feld charakterisierenden Größen, da in der Literatur in dieser Beziehung gelegentlich Unstimmigkeiten aufgetreten sind. Es wird betont, daß das Fermatsche Prinzip, in dem ja der Brechungsindex wesentlich auftritt, nicht mit dem Hamiltonschen Prinzip in Zusammenhang gebracht werden darf, trotz der Tatsache, daß sein Integrand leicht in die Form des Fermatschen Integranden transformiert werden kann. Denn das Fermatsche Prinzip enthält die Zeit nicht, im Gegensatz zum Hamiltonschen Prinzip. Es werden anschließend einige Eigenschaften der Elektronenoptik untersucht. — Verf. behandelt sodann den Übergang zur Wellenoptik und untersucht die Beziehungen zwischen dem Strahl und der Wellennormalen, wobei er auf eine Arbeit von P. Frank [Z. Physik 80, 1—18 (1933); dies. Zbl. 6, 92] Bezug nimmt. Er leitet die betreffende Beziehung direkt aus dem Fermatschen Integral ab, indem er die oft für isotrope Medien durchgeführte Methode auf anisotrope Medien verallgemeinert. Während der Brechungsindex in Termen des magnetischen Vektorpotentials eine eindeutige Funktion ist, ist dies selbst in gewissen Grenzen willkürlich. Es wird gezeigt, daß es für elektronenoptische Zwecke so gewählt werden muß, daß es dem Stokesschen Satz genügt, damit keine Schwierigkeiten aus der Unbestimmtheit des magnetischen Potentialvektors entstehen. — Die Ergebnisse der Untersuchung werden auf die Differentialgleichungen der Trajektorien, die Fokussierungseigenschaften eines axialsymmetrischen Feldes und die Interferenzerscheinungen angewandt, die von zwei konvergierenden Strahlenbündeln erzeugt werden, die einen magnetischen Fluß einschließen. *Picht.*

**Millett, Walter E.:** The focusing in crossed fields of charged particles at relativistic energies. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 74, 1058—1063 (1948).

Die zuerst von W. Henneberg [Ann. Physik 19, 335—344 (1934)] für geladene Teilchen gegebene Berechnung der Fokussierung, Linienbreite, Geschwindigkeits- und Energiedispersion im Feld eines Zylinderkondensators, dem ein homogenes Feld achsial überlagert ist, wird durch Berücksichtigung der Massenveränderlichkeit auf beliebig hohe Geschwindigkeiten verallgemeinert.

*W. Glaser (Wien).*



# Atomphysik.

## Quantenmechanik:

**Gregory, Christopher:** A note on quantized space. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. s. **73**, 806—807 (1948).

Snyder [*Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. s. **71**, 38—41 (1947)] hat die Basis für eine Lorentz-invariante Geometrie im vierdimensionalen Gitterraum angegeben. Die Größen im Gitterraum, wie Ort, Impuls u. dgl. stellen sich darnach als dreimpulsartige Operatoren in einem fünfdimensionalen Kontinuum dar, dessen sechs homogene Koordinaten der Bedingung  $\eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 - \eta_4^2 + \eta^2 = 0$  genügen. Snyder hat versucht, Orts-, Impuls- und Momententensor durch den Momententensor im  $R_5$  zu beschreiben. Da hierbei vierzehn physikalischen Größen nur zehn geometrische gegenüberstehen, ist das nicht befriedigend gelungen. Schon Yang hat darauf hingewiesen, daß der Übergang zu Drehungen im sechsdimensionalen Darstellungsraum mit fünfzehn Momentenkomponenten diese Schwierigkeit bei Snyder beseitigt. Verf. macht sich zu Nutze, daß die projektiven Transformationen im  $R_5$ , welche die Einheitskugel invariant lassen, mit der Drehgruppe im  $R_6$  zusammenfallen. Er benutzt die 15 Basisoperatoren der projektiven Gruppe im  $R_5$ . Er könnte noch einen Schritt weitergehen, wie es Hermann Jordan getan hat, und ausnützen, daß auch die Kugelverwandtschaften in  $R_4$  mit den Drehungen in  $R_6$  isomorph sind. Es ergibt sich daraus folgendes Bild. Die Wellengleichungen spielen in einem fünf- bzw. vierdimensionalen Kontinuum. Der Teilchenort ist jedoch eine Operatorgröße, die mit den Koordinaten des kontinuierlichen Mediums nicht identisch ist, die mit ihnen vielmehr ähnlich zusammenhängt wie der Teilchenimpuls und die nur diskrete Eigenwerte hat. Verf. weist mit Recht auf die Bedeutung der fünfzehnten Größe hin. Neben dem Momentenoperator, dem Impuls- und dem Ortsoperator gibt es einen fünfzehnten (entsprechend der fünfzehn-parametrischen Gruppe), der in den V. R. an die Stelle der Planckschen Konstanten tritt. Er liefert eine Transformation von Orts- in Impulskoordinaten und umgekehrt, hängt also irgendwie mit der Bornschen Reziprozität zusammen. *Bopp* (München).

**McWeeny, R. and C. A. Coulson:** The computation of wave functions in momentum space — I: The helium atom. *Proc. phys. Soc. London, Sect. A* **62**, 509—518 (1949).

Versucht wird, das Zweielektronenproblem beim Helium durch direkte Integration der Wellengleichung im Impulsraum zu lösen. Dies gelingt im vorliegenden Fall tatsächlich durch ein geschickt gewähltes Iterationsverfahren. *F. Sauter*.

**McWeeny, R.:** The computation of wave functions in momentum space — II: The hydrogen molecule ion. *Proc. phys. Soc. London, Sect. A* **62**, 519—528 (1949).

Die Übertragung des bei Helium erprobten Verfahrens, die Wellengleichung unmittelbar im Impulsraum zu lösen, auf Moleküle erscheint recht schwierig. Sie ist bisher nur für das Einelektronenproblem des Wasserstoffions gelungen, führt aber auch hier nicht zu voll befriedigenden Ergebnissen insofern, als die rechnerisch gefundene Impulsverteilung im Molekül nicht übereinzustimmen scheint mit der experimentell aus der Comptonlinie ermittelten. *F. Sauter* (Göttingen).

**Wintner, Aurel:** On the momentum operator in wave mechanics. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. s. **71**, 547—549 (1947).

Verf. zeigt zunächst an einem speziellen Beispiel, daß aus der quadratischen Integrierbarkeit der Lösung einer Differentialgleichung nicht auch die ihres Gradienten folgt. Und es wird bewiesen, daß letzteres nur dann der Fall ist, wenn die Potentialfunktion im Integrationsbereich nicht negativ unendlich wird. *F. Sauter*.

**Furry, W. H.:** Two notes on phase-integral methods. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. s. **71**, 360—371 (1947).

Verf. beschäftigt sich mit der bekannten Näherungsmethode von Wentzel,

Kramers und Brillouin zur Lösung von Wellengleichungen in einer Dimension. Diese Näherungslösung versagt einerseits in der Nähe der klassischen Umkehrpunkte und muß dort durch ein anderes Näherungsverfahren — nach Kramers Entwicklung der Potentialfunktion an solchen Punkten in eine Potenzreihe und Integration der Wellengleichung bei Berücksichtigung des ersten nicht verschwindenden Gliedes — ersetzt werden. Andererseits nimmt man meist an, daß dieses Näherungsverfahren bei gequantelten Systemen nur für höhere Quantenzahlen brauchbare Ergebnisse liefert. Hinsichtlich des ersten Punktes bringt nun Verf. eine andere Betrachtungsweise (im Anschluß an alte Arbeiten von G. G. Stokes), durch die man nicht nur die Kramersschen Ergebnisse wiedergewinnt, sondern auch deren Gültigkeitsgrenzen genau erkennen kann. Zum zweiten Punkt zeigt Verf. durch Vergleich der Ergebnisse der Näherungsrechnung mit denen der strengen Rechnung im Fall des harmonischen Oszillators, daß die Unterschiede selbst für die tiefsten Quantenzustände höchstens einige Prozent betragen.

*F. Sauter (Göttingen).*

**Fok (Fock), V. A.:** Das Mehrelektronenproblem der Quantenmechanik und der Atombau. Akad. Nauk SSSR. Jubil. Sbornik 1, 255—284 (1947) [Russisch].

Nach einer Darstellung des allgemeinen quantenmechanischen Formalismus des Mehrelektronenproblems und der Hartreeschen Behandlungsmethode in der bekannten Fockschen Betrachtungsweise wendet Verf. die Theorie auf Atome mit einem Valenzelektron außerhalb von abgeschlossenen Schalen, im besonderen auf das Natriumatom an. Der leitende Gedanke dabei geht dahin, erst nach dem üblichen Verfahren den Atomrumpf allein zu betrachten und dann die Bewegung des einen Außenelektrons in dem so gefundenen Potentialfeld unter Berücksichtigung der Polarisierung des Rumpfes durch das Außenelektron zu berechnen. Verf. findet so beim Na-Atom Energiewerte, die bei den optischen Termen bis auf etwa 1% mit den experimentellen Werten übereinstimmen, während er für die Röntgenterme zwar nicht so gute, aber immer noch befriedigende Übereinstimmung erhält. Da die hierbei benutzten Gleichungen aus einem Variationsproblem abgeleitet werden, kann Verf. für die Wellenfunktionen Wasserstoffeigenfunktionen mit entsprechenden Parametern einführen, wodurch die Rechnung erheblich erleichtert wird. Anhangsweise zeigt Verf., daß die Theorie des einfachen Wasserstoffatoms nach Schrödinger eng zusammenhängt mit der Potentialtheorie im vierdimensionalen Raum. Unter anderen Analogien wird gezeigt, daß die Entartung der Energieterme (Unabhängigkeit von der Drehimpulsquantenzahl) verknüpft ist mit der Invarianz der Potentialgleichung gegenüber vierdimensionalen Drehungen.

*Sauter.*

**Coulson, C. A. and I. Fischer:** Notes on the molecular orbital treatment of the hydrogen molecule. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, VII. s. 40, 386—393 (1949).

Detaillierte Untersuchung über die Güte der Annäherung der vier tiefsten Elektronenzustände des  $H_2$ -Moleküls durch Linearkombinationen atomarer Eigenfunktionen (LCAO-method) in Abhängigkeit vom Kernabstand  $R$ . Die Eigenfunktionen werden — in Abweichung von der üblichen Darstellung — zusammengesetzt aus den in bezug auf die beiden Atome  $a, b$  unsymmetrischen Funktionen  $A_{\pm} = \psi_a \pm \lambda \psi_b$ ;  $B_{\pm} = \psi_b \pm \lambda \psi_a$  [Argumente in  $A, B$  die Koordinaten entweder des Elektrons 1 oder 2.;  $\lambda(R)$  Parameter, abhängig von  $R$ ]. Aus diesen Funktionen sind die in bezug auf 1, 2 symmetrischen bzw. antisymmetrischen Zustände zu bilden. Diese Darstellung ist mit der üblichen mittels polarer und nicht polarer Funktionen äquivalent. — Die für die verschiedenen Gesamtzustände sich ergebenden Werte  $\lambda(R)$  sind — mit und ohne Berücksichtigung der Abschirmung — durch Minimierung der Energie (Variationsmethode) berechnet. Die Ergebnisse zeigen, daß und in welcher Weise insbesondere für größere  $R$  die einfache LCAO-Methode unzulängliche bzw. unrichtige Resultate ergibt.

*E. Hückel (Marburg).*



**Coulson, C. A. and Moffitt, W. E.:** The properties of certain strained hydrocarbons. *Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics*, VII. s. 40, 1—35 (1949).

In Kohlenstoffverbindungen wurde früher zur Deutung der gerichteten Valenzen Hybridisierung zwischen *s*- und *p*-Zuständen eingeführt. Auf die hybridisierten Eigenfunktionen wurde dann die Methode der Elektronenpaarung angewendet. Dabei wurde nach Pauling die Hybridisierung durch die Forderung maximaler Überlappung gepaarter Eigenfunktionen bestimmt. Im Falle „gespannter“ Moleküle (in denen die Valenzwinkel von den normalen, regulär tetraedrischen abweichen; Beispiel Cyclopropan) ist diese Forderung aber nicht zu erfüllen. Es ist dann die Hybridisierung, die durch einen Parameter  $\xi$  charakterisiert werden kann, unter Forderung vollständiger Elektronenpaarung aus dem Minimum der Energie zu bestimmen. Hierfür liegen dann nicht mehr wie bei ungespannten Molekülen die Atomverbindungslinien in den Richtungen maximaler Elektronendichte. Solche Bindungen werden „gebogen“ („bent“) genannt. Die Minimierung der Energie und die Berechnung des zugehörigen Parameterwertes  $\xi$  (und damit bei durch die Molekülkonfiguration vorgegebener Spannung — Abweichung vom normalen Valenzwinkel — der „Biegung“ der Bindungen) wird für Cyclopropan, -butan, -pentan durchgeführt. Dies geschieht unter verschiedenen Annahmen für die Werte  $\xi$  der maßgebenden Austauschintegrale, von welchen aber das Ergebnis sich als nur wenig abhängig erweist. Besonders charakteristisch zeigt sich der Einfluß des Wertes von  $\xi$  auf die Winkel zwischen den Bindungsrichtungen der H-Atome. Es wird ferner qualitativ verständlich gemacht, daß gespannte Bindungen kürzer als ungespannte sein können. — Die Biegung hat zur Folge, daß die Näherung durch Elektronenpaarung bei gespannten Bindungen schlechter als bei ungespannten wird, in dem Sinne, daß Resonanz zwischen den verschiedenen Paarungsstrukturen von größerem Einfluß wird. — Außer den genannten Molekülen wird noch das Äthylen, Cyclobutadien und -oktetaetraen diskutiert, wobei für letzteres die „Wiegenform“ („cradle“ model) sich als die stabile ergibt. — Im Anhang wird noch das Cyclopropan qualitativ nach der Methode der molekularen Elektronenzustände behandelt.

*E. Hückel (Marburg).*

**Vroelant, Claude:** Calcul approché des énergies et des indices de liaison par la méthode des états de spin. *C. r. Acad. Sci., Paris* 228, 1029—1031 (1949).

**Nierenberg, W. A., I. I. Rabi, and M. Slotnick:** A note on the Stark effect in diatomic molecules. *Physic. Rev., Lancaster Pa.*, II. s. 73, 1430—1433 (1948).

**Biermann, Ludwig und Klaus Lübeck:** Wellenfunktionen und Oszillatorenstärken im Grenzkontinuum der Spektren von Mg II und Si II. *Z. Astrophys.* 26, 43—50 (1949).

**Pryce, M. H. L.:** The mass-centre in the restricted theory of relativity and its connexion with the quantum theory of elementary particles. *Proc. R. Soc. London A* 195, 62—81 (1948).

Die Definition des Massenmittelpunktes im Raum verteilter Massen sowohl für ein Mehrkörpersystem als auch für die Feldenergie der Wellengleichung einer einzigen Partikel ist nicht eindeutig möglich, weil nicht alle Eigenschaften in der Relativitätstheorie, die wir dem Schwerpunkt zuschreiben, vereinbar sind. Verf. stellt verschiedene mögliche Definitionen nebeneinander und diskutiert die folgenden besonders. 1. Massenmittelpunkt ist ein mit der dynamischen Masse der Teilchen (ihrer Energie) gewogener mittlerer Ort. — 2. Da Definition (1) nicht Lorentz-invariant ist, wird speziell der Ort in einem System mit dem Gesamtimpuls 0 gewählt. — 3. Der Massenmittelpunkt nach (1) oder (2) genügt nicht den gewöhnlichen Poissonklammern für den Ort. Man kann ihn so definieren, daß die Poissonklammern erhalten bleiben. Aber in diesem Falle ist der Massenmittelpunkt wie in (1) nicht Lorentz-invariant. — Die Formeln für die verschiedenen definierten

Massenmittelpunkte werden angegeben und auf elementare Einkörpergleichungen von Elektronen, Mesonen des Spins 0 und 1 und Photonen angewandt. Charakteristisch ist, daß außer im Fall von Spin 0-Teilchen neben dem Bahnmoment spinartige Zusatzmomente auftreten. Diese sind aber für die Einteilchenwellengleichungen nicht mit bekannten Spinmomenten identisch, wenigstens nicht für die betrachteten Massenmittelpunkte. Dies ist auch nicht verwunderlich, da sich die gewöhnlichen Spinmatrizen auf den Ladungsmittelpunkt als Teilchenort beziehen. Es scheint, daß man auch im Falle des klassischen Mehrkörperproblems zu einfacheren Darstellungen kommt, wenn man den Ladungsmittelpunkt als Teilchenzentrum betrachtet. Doch ist eine solche Betrachtung nur für geladene Teilchen möglich.

Bopp (München).

**Kretschmann, Erich:** Über streng punktförmige Elementarladungen. Eine Bemerkung zur klassischen Elektronentheorie. Ann. Physik, VI. s. 4, 331—334 (1949).

An Hand des Energie-Impulssatzes zeigt Verf., daß man in der gewöhnlichen Elektrodynamik die Selbstwechselwirkungsbeträge streichen kann, ohne die Erhaltungssätze zu zerstören. Er schlägt darum vor, dies bei der Untersuchung der Wechselwirkung zwischen Elementarladungen zu tun. Für die Feldenergie von Ladungsbällen, die aus vielen Elementarladungen bestehen, also für die Makroelektrodynamik, ergibt sich kein wesentlicher Unterschied. Verf.s Theorie ist der bekannten klassischen Elektronentheorie von Dirac verwandt, unterscheidet sich von dieser aber darin, daß auch die von einem einzelnen Teilchen ausgehende Strahlungsenergie gestrichen wird. Der Unterschied ist von grundsätzlicher Bedeutung. Während sich Diracs Theorie der normalen Feldvorstellung unterordnet und nur auf „modifizierte“ Feldgleichungen bezieht, trifft dies für die Theorie des Verf. nicht mehr zu. Nach ihr ist es z. B. absolut sinnlos, von Strahlung zu reden, die (klassisch gesprochen) ein isoliertes Rutherfordisches Atom aussendet, es sei denn, es gäbe Probeladungen zu ihrem Nachweis. So verlockend diese Vorstellung für eine kritische Theorie der Elementarteilchen sein mag, so wenig kann man über ihre Brauchbarkeit aus den bisherigen Angaben erfahren. Man darf auf weitere Untersuchungen des Verf. gespannt sein, wenn man auch gern auf unbegründete Vorstellungen verzichtet, z. B. auf die Identifizierung der postulierten Strahlungsfreiheit eines isolierten Elektrons mit der Strahlungsfreiheit des Elektrons auf einer Bohrschen Bahn. Von entscheidendem Interesse scheint dem Ref. die Frage: Kann man wirklich bei Elementarteilchen auf die Strahlungsrückwirkung verzichten?

Bopp (München).

**Dyson, F. J.:** The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 75, 486—502 (1949).

Der Schwinger-Tomonaga-Formalismus basiert auf der Formel

$$i \hbar c \partial \Psi / \partial \sigma(x) = H_1(x) \Psi$$

(vgl. J. Schwinger, dies. Zbl. 32, 94), wobei  $H_1$  (a. a. O. als  $H$  bezeichnet) die Wechselwirkungsenergie der Photonen- und Partikelfelder untereinander und mit äußeren Störungen darstellt. Die allgemeine Lösung von (1) ist gegeben durch  $\Psi(\sigma) = U(\sigma) \Psi_0$ , wo  $\Psi_0$  ein konstanter Zustandsvektor ist und

$$U = U(\sigma_0) = \left(1 - i/\hbar c \cdot \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} H_1(x) dx\right) \left(1 - i/\hbar c \cdot \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} H_1(x) dx\right) \cdots,$$

gebildet mit einer geeigneten Folge  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$  von raumartigen Oberflächen.  $U(\infty)$  ist identisch mit Heisenbergs  $S$ -Matrix. Meist zerfällt  $H_1$  additiv in den Beitrag  $H^i$  der inneren Wechselwirkung der beiden Felder und den Beitrag  $H^e$  äußerer Kräfte. Man setze dann  $\Psi(\sigma) = S(\sigma) \Omega(\sigma)$  und lasse  $S(\sigma)$  der Gleichung



$i\hbar c \partial S / \partial \sigma = H^i S$  genügen; dann erfüllt  $\Omega$  die Gleichung

$$i\hbar c \partial \Omega / \partial \sigma = (S(\sigma))^{-1} H^e S(\sigma) \Omega = H_T \Omega.$$

Für eine einzelne Partikel stellt  $H_T$  direkt die Beeinflussung durch ein äußeres Feld einschließlich der Strahlungskorrektur dar. In Feynmans Theorie (größtenteils noch unveröffentlicht) tritt an Stelle von  $H_T$  der Operator  $H_F = S(\infty) H_T$ . Verf. arbeitet eine Methode für die Berechnung der Matrixelemente von  $H_T$  aus, wobei er sich für die sukzessive Berücksichtigung der verschiedenen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren einer Art graphischen Fahrplans bedient. Insofern als er dazu von der Tomonaga-Schwingerschen Theorie ausgeht, wird zugleich der Beweis für die Äquivalenz der beiden Formulierungen geführt. Als Anwendung wird die Strahlungskorrektur 2. Ordnung für die Bewegung eines Elektrons in einem äußeren Felde berechnet.

Wessel (Dayton, Ohio).

**French, J. D. and V. F. Weisskopf:** The electro magnetic shift of energy levels. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. s. 75, 1240—1248 (1949).

Die Änderung der Energieniveaus eines Elektrons in einem äußeren Felde durch die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfelde wird mit Hilfe der Störungstheorie in ihrer gewöhnlichen Form berechnet. Die unendliche Selbstenergie des Elektrons, die in gleicher Näherung auftritt, wird durch Subtraktion eines „Massenoperators“  $M$  von der Hamiltonschen Funktion beseitigt. Die zur Bildung von  $M$  benutzten Kriterien sind die, daß der Operator die richtige Selbstenergie eines Elektrons in Abwesenheit eines äußeren Feldes liefern soll und daß die berichtigte Hamiltonfunktion die Termverschiebung in einem äußeren Feld in kovarianter Form ergibt. Es wird gezeigt, daß  $M$  durch diese Forderungen eindeutig definiert ist. Es ergeben sich 1051 Megahertz für die  $(2s_{\frac{1}{2}} - 2p_{\frac{1}{2}})$ -Verschiebung beim Wasserstoff, und auch das zusätzliche magnetische Moment des Elektrons in Höhe von  $\alpha/2\pi$  Bohrschen Magnetonen, wie es zuerst von Schwinger gefunden wurde. Die verbesserte Hamiltonfunktion kann auch zur Berechnung von Strahlungskorrekturen bei anderen Prozessen dienen (Zusammenfassung der Autoren.)

Wessel.

**Green, Alex E. S.:** Higher order field equations. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. s. 73, 519 (1948).

Quadratische Lagrangefunktionen werden untersucht, welche zur Wellengleichung achter Ordnung führen. Die Hamiltonfunktion wird nach bekannten Methoden ausgerechnet und diskutiert. Die Endlichkeit der Selbstenergie versteht sich in Theorien höherer Ordnung von selbst. Die Beschränkung auf positive Energiewerte ist wie in der allgemeinen linearen Theorie möglich.

Bopp.

**Gupta, S. N.:** Magnetic polarizability of the electron. *Nature*, London 163, 686—687 (1949).

Nächst dem von Schwinger und Luttinger berechneten zusätzlichen magnetischen Moment des Elektrons berechnet Verf. die quadratisch von der magnetischen Feldstärke abhängigen Energieterme, welche eine Polarisierbarkeit des Elektrons anzeigen. Für das Verhältnis zum magnetischen Moment von Schwinger und Luttinger erhält Verf.  $(\mu H / mc^2) \ln (mc^2 / \mu H)$ . Darin ist  $\mu$  das magnetische Moment. Das Verhältnis ist in allen praktischen Fällen unbeobachtbar klein.

Bopp.

**Drell, S. D.:** The magnetic internal conversion coefficient. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. s. 75, 132—136 (1949).

Es wird erneut die Absorption berechnet, welche die von einem magnetischen Dipol im Kern ausgehende elektromagnetische Welle in der  $K$ -Schale der Elektronenhülle erfährt. Dabei werden, im Gegensatz zu früheren Untersuchungen, die Elektronen durch vierkomponentige Wellenfunktionen nach Dirac beschrieben; doch werden gerade im relativistischen Stromausdruck zahlreiche Glieder als klein von höherer Ordnung vernachlässigt. Immerhin findet Verf. in Übereinstimmung mit einer Formel von S. M. Dancoff und P. Morrison [*Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. s. 55, 122—130 (1939); dies. Zbl. 20, 280], daß die innere Absorption magnetischer Kernstrahlung von gleicher Größenordnung ist wie die elektrischer Multipolstrahlung der gleichen Ordnung und letztere in der Nähe der Absorptionskanten beträchtlich übertrifft.

F. Sauter (Göttingen).



**Hough, P. V. C.:** The angular distribution of pair-produced electrons and bremsstrahlung. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 74*, 80—86 (1948).

Für die Paarerzeugung im Kernfeld und die Bremsstrahlung wird die Winkelverteilung angegeben in Abhängigkeit von den Quotienten Elektronenergie/Lichtquantenergie bei der Paarbildung, Lichtquantenergie/ursprüngliche Elektronenergie bei der Bremsstrahlung. Infolge eines Näherungsverfahrens sind die Ergebnisse nur gültig, wenn die Energie der beiden Teilchen des Paares bzw. des Elektrons vor und nach dem Bremsvorgang  $\gg mc^2$  und wenn der Winkel Elektron-Lichtquant  $\gg mc^2/\text{Elektronenergie}$  bzw.  $mc^2/\text{ursprüngliche Elektronenergie}$  ist. Der Einfluß, den die Abschirmung durch die Elektronenhülle und die Abweichung vom Coulombfeld in Kernnähe mit sich bringen, wird diskutiert. Der totale Wirkungsquerschnitt für Paarerzeugung wird mit dem für Mesonenerzeugung durch Quanten verglichen.

Kockel (Leipzig).

**Feer, Daniel B.:** Polarization of mesons produced at threshold in gamma-nucleon collisions. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 76*, 306 (1949).

### Bau der Materie:

• **Lonsdale, K.:** Crystals and X-rays. London: G. Bell and Sons, Ltd., 1948. VIII, 199 p. + 13 plates, 21 s. net.

• **Dean, W. R. and E. H. Mann:** The change in strain energy caused by a dislocation. *Proc. Cambridge philos. Soc. 45*, 131—140 (1949).

Verff. führen die Idee von W. L. Bragg, daß eine Versetzung dann gebildet wird und die plastische Verformung einsetzt, wenn durch sie die elastische Deformationsenergie des Kristalls vermindert wird, quantitativ durch. Die Versetzung wird, wie früher [W. R. Dean und A. H. Wilson, dies. Zbl. 29, 190] durch die gegenseitige Verschiebung zweier benachbarter Gleitebenenstücke der Länge  $L$  um den Betrag der Gitterkonstanten  $d$  dargestellt, wobei die singulären Randpunkte durch kleine Kreise mit dem Radius  $R$  ausgeschlossen werden. Neben dem früher angegebenen Feld der Deformationen der Versetzung selbst wird ein zweites betrachtet, das bis auf die Störungen durch die Kreiszyylinder eine einfache Scherung vom Betrag  $\gamma$  darstellt, welche durch eine Schubbeanspruchung des Kristalls hervorgerufen wird. Die Lösungen werden wie früher nach Jeffrey zunächst in B.polarkoordinaten angegeben und dann in kartesische Koordinaten umgerechnet, da mit diesen die Deformationsenergien einfacher berechnet werden können. Es ergibt sich, daß in einem hinreichend großen Kristall die Gesamtenergie durch eine Versetzung in erster Näherung um den Betrag

$$\Delta U = (EdL/8(1-\nu^2))(\gamma - \gamma_E); \quad \gamma_E = (2d/\pi L) \ln(L/R)$$

abnimmt ( $\nu$  Poissonsche Querkontraktion), also die Bedingung für die Bildung einer Versetzung  $\gamma \geq \gamma_E$  lautet. Diese Bedingung wurde von W. L. Bragg weiter diskutiert.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

**Leibfried, Günther und Kurt Lücke:** Über das Spannungsfeld einer Versetzung. *Z. Physik 126*, 450—464 (1949).

Zur Berechnung des Spannungsfeldes einer Versetzung wird unter der Annahme eines ebenen Verzerrungszustandes diese durch einen Hohlzylinder ersetzt, aus dem parallel zu einer Mantellinie ( $y$ -Richtung) eine planparallele Scheibe mit der Dicke des Atomabstandes  $\lambda$  in der Gleitrichtung ( $x$ -Richtung) herausgeschnitten ist und dessen Endflächen wieder zusammengefügt werden. Mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion wird die Lösung aufgestellt, welche einen spannungsfreien Innenrand des Zylinders ergibt. Es wird gezeigt, daß derselbe Spannungszustand auch in der von Taylor angegebenen Weise beschrieben werden kann, indem man den Zylinder längs der  $x$ -Achse aufschneidet und die Schnittflächen um den Betrag  $\lambda$  gegeneinander verschiebt. Die von Taylor angegebene Lösung ergibt jedoch keinen



spannungsfreien Innenrand des Zylinders und ist divergenzfrei (keine Gitterdilatationen), was in Wirklichkeit nicht zutreffen kann. Es wird gezeigt, daß die Lösung der Verff. mit der von Peierls unter näherungsweise Berücksichtigung der atomaren Struktur der Kristalle erhaltenen Lösung in einer gegenüber  $\lambda$  großen Entfernung vom Mittelpunkt der Versetzung, wo die Voraussetzungen der Elastizitätstheorie auch nur zutreffen, übereinstimmt.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

**Zachariasen, W. H.:** Direct determination of stacking disorder in layer structures. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. s. 71, 715—717* (1947).

Es werden Schichtstrukturen betrachtet, bei welchen die in sich ungestörten und äquidistanten Lagen um bestimmte, durch eine Wahrscheinlichkeitsfunktion  $W_n(\delta)$  charakterisierte Beträge  $\delta = \kappa_1 a_1 + \kappa_2 a_2$  parallel zu ihrer Ebene mit den Grundvektoren  $a_1$  und  $a_2$  gegeneinander verschoben sind. Der Index  $n$  durchläuft dabei die Zahlen  $0, \dots, N-1$ , wo  $N$  die Zahl der Ebenen in der statistischen Identitätsperiode der Verschiebungen bezeichnet. Es wird gezeigt, daß die Koeffizienten  $W_{n h_1 h_2}$  der Fourierentwicklung

$$(1) \quad W_n = \sum_{h_1} \sum_{h_2} W_{n h_1 h_2} \cos 2\pi(\kappa_1 h_1 + \kappa_2 h_2)$$

aus Röntgendaten unmittelbar bestimmt werden können. Der Intensitätsverlauf eines Reflexes  $h_1 h_2 h_3$  als Funktion des stetig veränderlich betrachteten dritten Index  $h'_3$  ist nämlich gegeben durch

$$(2) \quad I_{h_1 h_2}(h'_3) = I_0 V B_{h_1 h_2} \sum_n W_{n h_1 h_2} \cos 2\pi n h'_3.$$

Dabei bezeichnen:  $I_0$  die Intensität des Primärstrahls,  $V$  das Volumen von  $N$  Lagen,  $B$  das Produkt aus dem Thomsonschen Streufaktor, dem Quadrat des Strukturfaktors und dem reziproken Zellvolumen. Daraus ergibt sich

$$(3) \quad W_{n h_1 h_2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (I/I_0 V B) \cos 2\pi n h'_3 dh'_3.$$

Ein zunächst unbestimmt bleibender Proportionalitätsfaktor kann aus der Bedingung  $\iint W d\kappa_1 d\kappa_2 = 1$  berechnet werden. Die Beziehungen (1) und (2) lassen erkennen, daß die Reflexe ( $00h_3$ ) durch Störungen der betrachteten Art nicht beeinflußt werden, die anderen Reflexe im allgemeinen jedoch diffus verbreitert sind.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

**Matyáš, Z.:** Change of electrical resistance of alloys during ageing. *Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, VII. s. 40, 324—337* (1949).

Nach einer Wiederholung der allgemeinen Theorie für den elektrischen Widerstand in Metallen und speziell in Aluminium wird die Theorie ausgedehnt auf den Fall, daß im Aluminium Fremdatome eingelagert sind. Beim Altern des Mischkristalls schließen sich diese Fremdatome zu kleineren und größeren Aggregaten zusammen, wobei zunächst starke innere Spannungen entstehen, die sich aber dann mit der Zeit ausgleichen. Die rechnerische Ermittlung der elektrischen Widerstandsänderung durch diese Inselbildung ergibt nun in der Tat für diese in qualitativer Hinsicht den beobachteten Gang. Aber auch quantitativ liegen die errechneten Ergebnisse in der richtigen Größenordnung.

F. Sauter (Göttingen).

**Chapelle, Jean:** Quelques remarques sur le spectre d'un monocristal de  $\text{PO}_4\text{H}_2\text{NH}_4$ . *C. r. Acad. Sci., Paris 226, 1814—1815* (1948).

Angabe der für die Ramanstreuung maßgebenden Tensoren und der Depolarisationsfaktoren für kristallographische Punktgruppen der Symmetrie  $S_4u(4, 2)$ .

Pietsch (Berlin).

**Arnous, Edmond et Daniel Massignon:** Théorie cinétique des liquides de M. Born et H. S. Green. *J. Physique Radium, VIII. s. 10, 45D—55D* (1949).

Kurzer Bericht mit Literaturangaben.